Trigonométrie

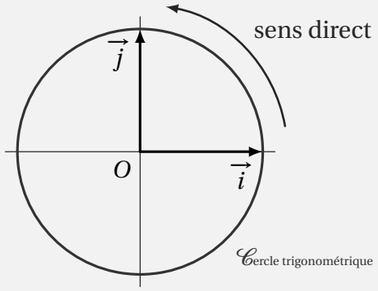
I. Cercle trigonométrique

1) Le cercle trigonométrique

Définition 1 – Cercle trigonométrique

Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on appelle **cercle trigonométrique** :

- le cercle de **centre *O*** et de **rayon 1**
- agrémenté d'un sens de parcours qui est celui inverse des aiguilles d'une montre. Ce sens est appelé **sens direct** ou **sens trigonométrique**.



Remarque : Le sens des aiguilles d'une montre est appelé **sens indirect** ou **sens horaire**.

Propriété 1 – Périmètre du cercle trigonométrique

Le périmètre du cercle trigonométrique est de $\mathscr{P} = \mathbf{2\pi}$.

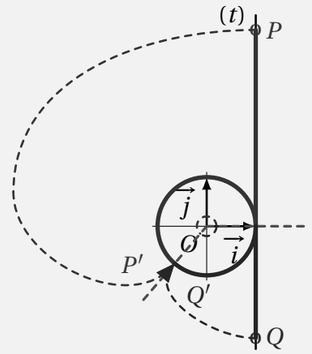
① **Démonstration :** *Formule du périmètre d'un cercle.*

2) Angle en radians

Définition 2 – Enroulement de la droite des réels autour du cercle trigonométrique

Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ muni d'un cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ et de sa tangente (t) au point $I(1;0)$.

- On assimile la tangente (t) à l'**axe des réels**.
- On peut associer à chaque point P de (t) un unique point P' du cercle trigonométrique en **« enroulant » la droite sur le cercle**.
- Chaque point P' du cercle peut être repéré par la valeur de l'**angle $\widehat{IOP'}$**.
- Chaque nombre réel peut donc être associé à un unique angle.

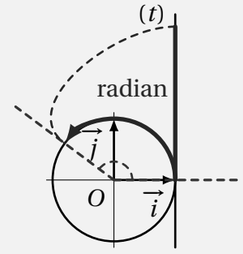


Remarque : Chaque réel est associé à un unique point, mais l'inverse est faux (ici $P \neq Q$ mais $P' = Q$).

Définition 3 – Radian

Le **radian** est l'unité international de mesure des angles.

- La mesure d'un angle en radian est **la longueur d'un « déroulement » de cette angle** sur le cercle trigonométrique.



Remarque :
Le périmètre du cercle trigonométrique étant de 2π, tous les angles donnés en radian sont équivalents à plus ou moins un multiple de 2π.

Exemple : La mesure de l'angle ci-dessus est de … radians, c'est la longueur de l'enroulement.

Propriété 2 – Correspondance degrés/radians

Par proportionnalité, on obtient les correspondances suivantes :

Angle en degrés	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Angle en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

$\times \frac{\pi}{180}$

Exemple : Un angle de 120° mesure ..... radians

3) Angle orienté de vecteurs

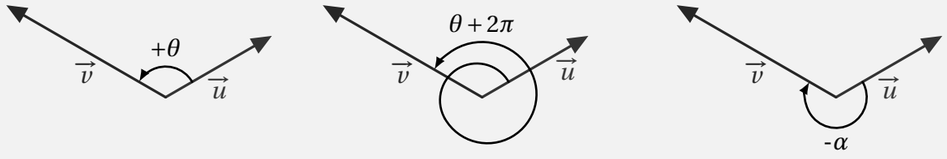
Définition 4 – Angle orienté de vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls :

- L'**angle orienté** entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ se note $(\vec{u}, \vec{v})$.

En considérant les points A tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et B tel que $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$:

- Une **mesure θ de l'angle** $(\vec{u}, \vec{v})$ est la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ précédé d'un **signe** + dans le cas d'un parcours dans le **sens direct** ou d'un **signe** − dans le cas d'un parcours dans le **sens indirect**.
- Toutes les mesures de $(\vec{u}, \vec{v})$ sont de la forme θ**+ 2k**π avec $k \in \mathbb{Z}$



Remarque : k correspond au nombre de tours effectués autour du cercle.

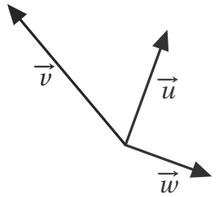
Exemple :

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment un angle de …° parcouru dans le sens ……. :

- $(\vec{u}, \vec{v})$ = ……. , avec $k \in \mathbb{Z}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ forment un angle de …° parcouru dans le sens ……. :

- $(\vec{u}, \vec{w})$ = ……. , avec $k \in \mathbb{Z}$.



Définition 5 – Mesure principale d'un angle orienté

Le **mesure principale d'un angle orienté** est, parmi l'ensemble des mesures de l'angle, la seule qui appartienne à l'intervalle $]-\boldsymbol{\pi};\boldsymbol{\pi}]$.

Remarque :

Un réel de la forme $\dfrac{a}{b}\pi \in]-\pi;\pi] \iff \dfrac{a}{b} \in]-1;1]$.

Exemple :

- La mesure principale de $\dfrac{4\pi}{7}$ est ….. car …… .
- La mesure principale de $-\dfrac{5\pi}{4}$ est ….. car …… .

II. Cosinus et sinus d'un angle orienté

1) Généralités

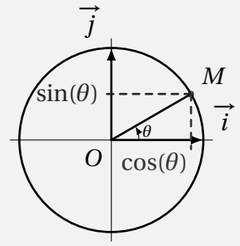
Définition 6 – Cosinus et sinus d'un angle orienté

Soient $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé et M un point du cercle trigonométrique.

Si θ est une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM}\right)$, alors :

- on appelle **cosinus** de θ, noté **cos($\boldsymbol{\theta}$)**, l'**abscisse** du point M ;
- on appelle **sinus** de θ, noté **sin($\boldsymbol{\theta}$)**, l'**ordonnée** du point M.

M a donc pour coordonnées $(\cos(\theta);\sin(\theta))$.



Remarque :

Lorsque θ est un réel dont la mesure principale est comprise entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$, alors les définitions du cosinus et du sinus (dans le cercle) coïncide avec leurs définitions dans le triangle rectangle.

Propriété 3 – Extension des propriétés

Pour tout réel θ :

- $-1 \leqslant \cos(\theta) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(\theta) \leqslant 1$
- $\boldsymbol{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1}$

Remarque : La notation $\cos^2(\theta)$ est un abus d'écriture pour $(\cos(\theta))^2 = \cos(\theta) \times \cos(\theta)$.

Démonstration : *Inégalité triangulaire et Théorème de Pythagore* ②

2) Valeurs remarquables

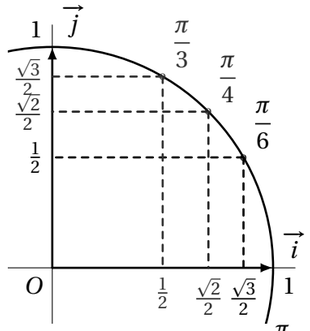
Propriété 4 – Valeurs remarquables ◆◆◆

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

◅ **Remarque :**

Ce tableau peut être plus facile à mémoriser sous les formes :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
$\sin(\theta)$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$



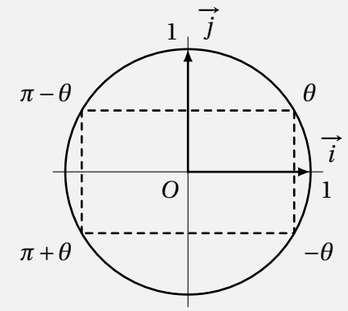
Triangle isocèle pour $\frac{\pi}{3}$ *symétrie pour* $\frac{\pi}{4}$.

③ ➳ **Démonstration ♥ au programme ♥ :**

3) Symétries du cercle trigonométrique

Propriété 5 – Configuration du rectangle ◆◆

	cosinus	**sinus**
$-\theta$	$\cos(-\theta)=\cos(\theta)$	$\sin(-\theta)=-\sin(\theta)$
$\pi-\theta$	$\cos(\pi-\theta)=-\cos(\theta)$	$\sin(\pi-\theta)=\sin(\theta)$
$\pi+\theta$	$\cos(\pi+\theta)=-\cos(\theta)$	$\sin(\pi+\theta)=-\sin(\theta)$



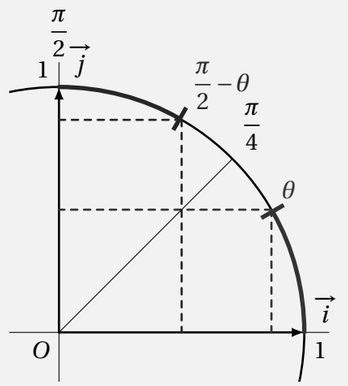
✎ **Exemple :**

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=$ … et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=$ ….. :

- $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=$ … et $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=$ …….
- $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=$ ….. et $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=$ …..
- $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=$ ….. et $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=$ …….

Propriété 6 – Angles complémentaires ◆◆

	cosinus	**sinus**
$\frac{\pi}{2}-\theta$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin(\theta)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos(\theta)$



◅ **Remarque :**

Cette propriété découle de la symétrie par rapport à la droite d'angle $\frac{\pi}{4}$.

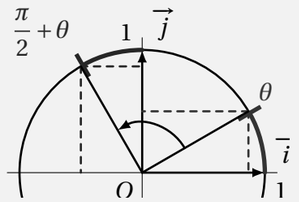
✎ **Exemple :**

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=$ ….. et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=$ … :

- $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=$ …… .
- $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=$ …… .

Propriété 7 – Quart de tour gauche

	cosinus	sinus
$\frac{\pi}{2}+\theta$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin(\theta)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos(\theta)$



Remarque : En pivotant, on se retrouve avec la même configuration mais où $\vec{j}$ joue le rôle de $\vec{i}$.

Exemple :

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=$ ..... et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=$ ... :

- $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=$ ..... .
- $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=$ ..... .

À savoir faire :

- Par lecture du cercle trigonométrique, déterminer, pour des valeurs remarquables de x, les cosinus et sinus d'angles associés à x.

III. Équations trigonométriques

Méthode 1 – Résoudre graphiquement une équation trigonométrique

Pour résoudre une équation du type $\cos(x)=a$ ou $\sin(x)=a$:

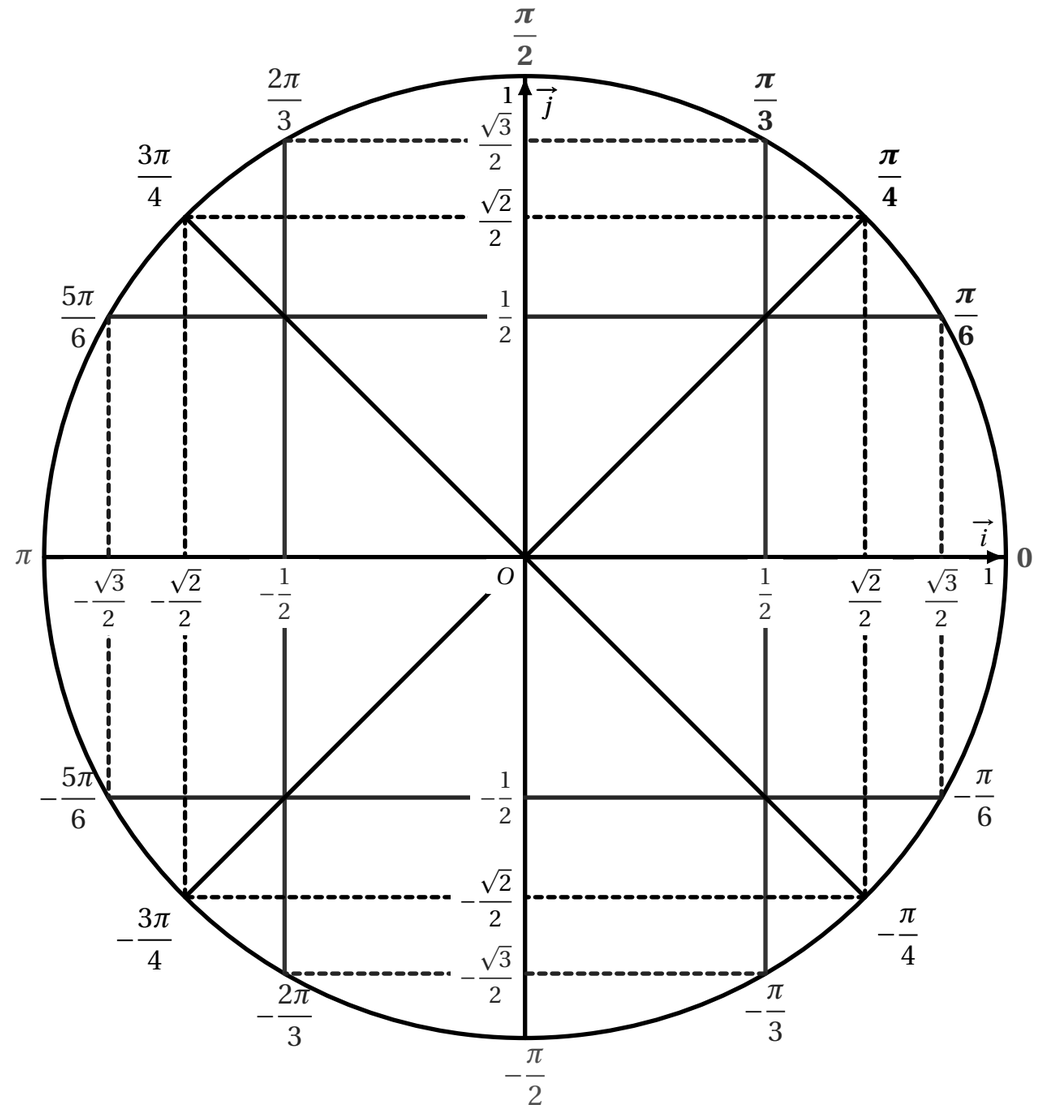
1. On commence par **identifier graphiquement** les valeurs de x de l'intervalle $]-\pi;\pi]$ qui vérifient l'équation.
   Pour ce faire, on trace le cercle trigonométrique et **on place a** sur l'**axe des abscisses** (dans le cas $\cos(x)=a$) ou sur l'**axe des ordonnées** (dans le cas $\sin(x)=a$).
2. Grâce au **cercle trigonométrique** et **symétries**, on trouve les valeurs recherchées.
3. On exprime l'ensemble des solutions en ajoutant les **multiples** de 2π aux solutions.

Exemple :

Pour déterminer l'ensemble des nombres réels x solutions de l'équation $\sin(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$:

1. En observant le cercle trigonométrique (voir page suivante), on obtient deux solutions dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$: $x=$ ... et $x=$ ..... .
2. Les autres solutions correspondent aux tours de cercles supplémentaires.
3. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est donc composé des réels de la forme $x=$ ..... ou de la forme ..... avec $k\in\mathbb{Z}$.

IV. Cercle trigonométrique complet



Méthode 2 – Construire un cercle trigonométrique

Pour construire rapidement un cercle trigonométrique complet :

1. On commence par tracer le **cercle** et les **deux axes**.
2. On trace les **axes milieux** qui permettent d'identifier les $\cos(\theta)=\pm\frac{1}{2}$ et $\sin(\theta)=\pm\frac{1}{2}$.
3. On trace les **diagonales** des axes qui nous permettent de positionner $\frac{\pi}{4}$.
4. On remplit les valeurs des **angles** entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ dans l'ordre.
5. Pour les suivantes, si besoin, par **symétrie**.
6. Pour trouver les **valeurs trigonométriques**, on place dans l'ordre 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et 1.

V. Fonctions trigonométriques

1) Parités et périodicités

Définition 7 – Fonctions cosinus et sinus

1. La fonction **cosinus** est la fonction qui, à tout réel x, associe $\cos(x)$.
2. La fonction **sinus** est la fonction qui, à tout réel x, associe $\sin(x)$.

Propriété 8 – Parités des fonctions cosinus et sinus

1. La fonction **cosinus est paire** :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \boldsymbol{\cos(-x) = \cos(x)}$$

2. La fonction **sinus est impaire** :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \boldsymbol{\sin(-x) = -\sin(x)}$$

Remarque :

- Une fonction **paire** vérifie $f(-x) = f(x)$ pour tout x de son ensemble de définition, sa représentation graphique admet l'**axe des ordonnées comme axe de symétrie**.
- Une fonction **impaire** vérifie $f(-x) = -f(x)$ pour tout x de son ensemble de définition, sa représentation graphique admet l'**origine comme centre de symétrie**.

④ **Démonstration :** *Propriétés dans le cercle trigonométrique*

Propriété 9 – Périodicités des fonctions cosinus et sinus

Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$ $\quad \boldsymbol{\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)}$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$ $\quad \boldsymbol{\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)}$

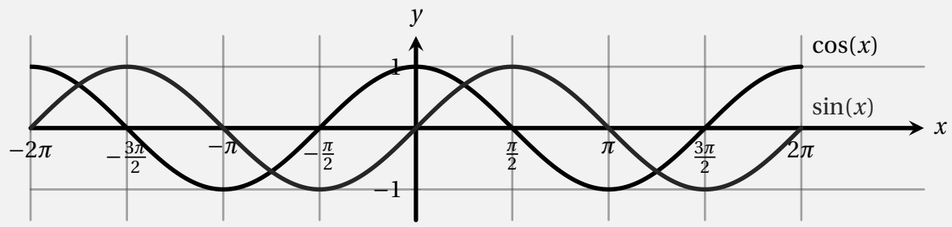
⑤ **Démonstration :** *Propriétés dans le cercle trigonométrique*

2) Courbes représentatives

Définition 8 – Sinusoïdes

Les courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus sont des **sinusoïdes**.

Propriété 10 – Courbes représentatives



1. Les fonctions étant **2π-périodiques**, les courbes représentatives sont **invariantes par translation** de vecteur $2\pi\vec{i}$.
2. La fonction **cosinus** étant **paire**, sa courbe représentative admet l'**axe des ordonnées comme axe de symétrie.**
3. La fonction **sinus** étant **impaire**, sa courbe représentative admet **l'origine du repère comme centre de symétrie.**
4. Comme $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ la courbe représentative de la fonction cosinus correspond à la **translation** de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$ de la fonction sinus.

À savoir faire :

- Lier la représentation graphique des fonctions cosinus et sinus et le cercle trigonométrique.
- Traduire graphiquement la parité et la périodicité des fonctions trigonométriques.