Fonctions polynômes de degré 2 et 3

I. Fonctions polynômes de degré 2

1) Définitions

Définition 1 – Polynôme du second degré

On appelle **polynôme (ou trinôme) du second degré** toute expression pouvant se mettre sous la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où $a \in \mathbb{R}^*$ et b et $c \in \mathbb{R}$ sont appelés les **coefficients** de la fonction.

✎ **Exemple :** $3x^2 - 2x + 1$ est un polynôme du second degré. Avec $a = 3$, $b = -2$ et $c = 1$

Définition 2 – Forme développée

L'écriture :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

est appelée **forme développée** du polynôme.

✎ **Exemple :** La forme développée de $g(x) = 5x(2x+1) + 4$ est $g(x) = 10x^2 + 5x + 4$.

Propriété 1 – Parabole

La courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré dans un repère orthogonal est une **parabole**.



2) Allure et variations d'un polynôme de la forme $x \mapsto ax^2 + c$

Théorème 1 – Variations d'un polynôme de la forme $x \mapsto ax^2 + c$

Avec $f(x) = ax^2 + c$.

- **Si $a > 0$:**
  - f est strictement **décroissante** sur $]-\infty;0]$
  - **puis** strictement **croissante** sur $[0;+\infty[$
  - f admet un **minimum** égal à c atteint en $x = 0$.
- **Si $a < 0$:**
  - f est strictement **croissante** sur $]-\infty;0]$
  - **puis** strictement **décroissante** sur $[0;+\infty[$
  - f admet un **maximum** égal à c atteint en $x = 0$.

➳ **Démonstration :** *Étudier les variations de x*

Démontrons la décroissance si $a > 0$ sur $]-\infty;0]$, les autres cas sont des adaptations.
Prenons x_1 et $x_2 \in]-\infty;0]$ et supposons $x_1 < x_2$.
On a donc : $x_1 < x_2 < 0$

$\iff x_1^2 > x_2^2$ *(inversion, car négatif)*

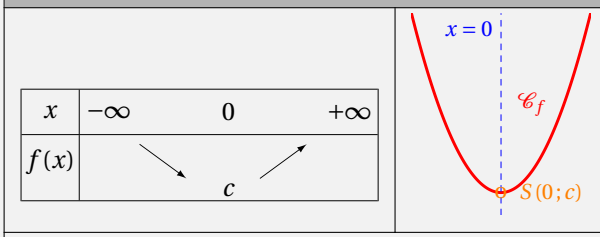
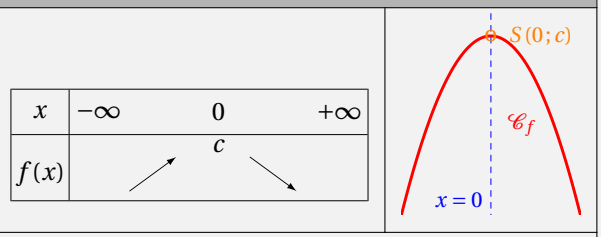
$\iff ax_1^2 > ax_2^2$ *(conservation, car a positif)*

$\iff ax_1^2 + c > ax_2^2 + c \iff f(x_1) > f(x_2)$

La fonction est donc strictement décroissante sur $]-\infty;0]$.

Propriété 2 – Allure de la parabole $y = ax^2 + c$

Dans un repère du plan, la courbe représentative de $f(x) = ax^2 + c$ est une **parabole** de sommet $S(0;c)$ qui admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées).

$a > 0$	$a < 0$
	
– orientée vers le haut –	*– orientée vers le bas –*

✎ **Exemple :**

Représentons la fonction $h(x) = 3x^2 + 13$.

- $a = 3 > 0$, donc c'est une parabole orientée vers le haut.
- $c = 13$, donc son sommet est $S(0;13)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	13	↗

3) Signes et racines d'un polynôme du second degré

a) Forme factorisée et racines

Définition 3 – Racine

- On appelle **racine** de f un réel x_0 tel que : $\boldsymbol{f(x_0) = 0}$.
- Le point de coordonnées $(x_0;0)$ est un point d'**intersection** de la **courbe** représentative de f avec l'**axe des abscisses**.

Remarque : Un polynôme de degré n peut avoir au maximum n racines.

Propriété 3 – Forme factorisée

x_1 et x_2 sont des **racines** du polynôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ **si et seulement si** $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

C'est la **forme factorisée** de $f(x)$.

Remarque : Si $x_1 = x_2$ on la note souvent x_0, c'est une racine double.

Méthode 1 – Factoriser avec des racines évidentes

Si l'on **repère** une racine du polynôme on peut obtenir la forme factorisée.
Il est parfois possible de repérer une telle racine en cherchant des cas « simples ».
C'est ce que l'on appelle des **racines « évidentes »**.
On peut par exemple :

- Calculer de tête pour **tester** la valeur de $f(x_1)$ avec $x_1 = 1$, $x_1 = -1$, $x_1 = 2$, etc. Puis développer la forme $a(x - x_1)(x - x_2)$ pour identifier x_2.
- Repérer des **identités remarquables**.

Exemple :

1. Pour factoriser $f(x) = 2x^2 - 16x + 14$ on peut remarquer que $f(1) = 0$.
2. En développant $2(x-1)(x-x_2)$ on obtient $2x^2 - 2xx_2 - 2x + 2x_2 = 2x^2 + (-2x_2 - 2)x + 2x_2$
3. On peut donc identifier $14 = 2x_2 \iff x_2 = 7$.
4. La forme factorisée est donc : $f(x) = 2(x-1)(x-7)$.

Propriété 4 – Racines de $x^2 = c$

Soit c un réel **strictement positif**.
L'équation $x^2 = c$ possède exactement deux solutions :

$$\boldsymbol{\sqrt{c}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{-\sqrt{c}}$$

Exemple : $x^2 = 25 \iff x = \sqrt{25} = 5$ ou $x = -\sqrt{25} = -5$.

b) Signes et allures

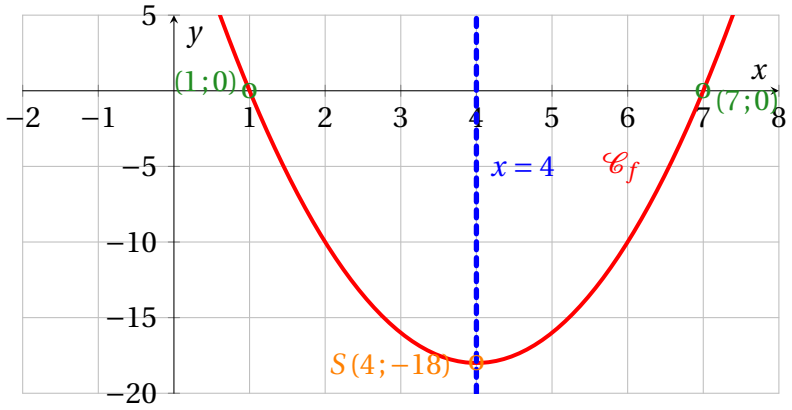
Propriété 5 – Sommet et axe de symétrie ◆◆

Soit a un réel non nul, x_1 et x_2 deux réels.
La parabole d'équation $y = a(x-x_1)(x-x_2)$:

- a son **sommet** au point d'abscisse $\boldsymbol{x_S = \dfrac{x_1 + x_2}{2}}$.
- est **symétrique** par rapport à la droite d'équation $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

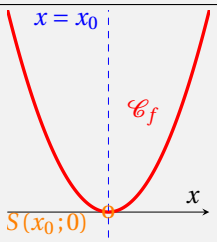
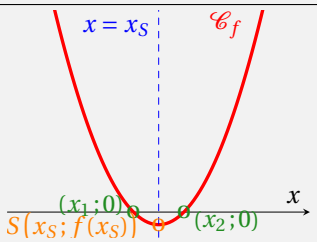
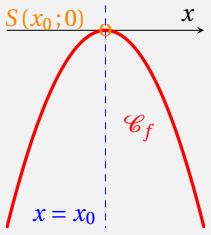
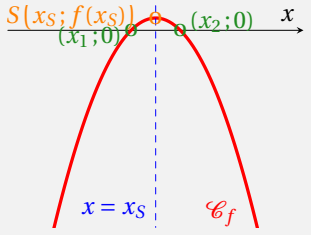
✎ **Exemple :**
En reprenant l'exemple précédent de la parabole d'équation $y = 2(x-1)(x-7)$:

- $x_S = \dfrac{7+1}{2} = 4$.
- $f(x_S) = f(4) = 2(4-1)(4-7) = 2 \times 3 \times (-3) = -18$
- Le sommet de la parabole est donc $S(4;-18)$.
- L'axe de symétrie de la parabole est donc $x = 4$.



Propriété 6 – Signe d'un polynôme du second degré ◆◆◆

Soit $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$.
$f(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ entre les racines (si elles ne sont pas confondues).

	Si $x_0 = x_1 = x_2$	**Si $x_1 < x_2$**
Signe	de a sur $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$	de a sur $]-\infty ; x_1[$ et sur $]x_2 ; +\infty[$ ainsi que de $-a$ sur $]x_1 ; x_2[$
Sommet	$S(x_0 ; 0)$	$S\big(x_S ; f(x_S)\big)$ avec $x_S = \dfrac{x_1+x_2}{2}$
Tableau	x : $-\infty$	x_0	$+\infty$ $f(x)$: s. de a	0	s. de a	x : $-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$ $f(x)$: s. de a	0	s. de $-a$	0	s. de a
Pour $a > 0$		
Pour $a < 0$		

✎ **Exemple :**
Dressons le tableau de signe de la fonction $h : x \mapsto -2(x-1)(x+6)$

- Les racines sont $x_1 = -6$ et $x_2 = 1$.
- $a = -2 < 0$ donc a est de signe négatif.

x	$-\infty$		-6		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Au programme :

- ◆ Courbes de : $x \mapsto ax^2$, $x \mapsto ax^2 + b$, $x \mapsto a(x-x_1)(x-x_2)$.
- ◆ Axes de symétrie.
- ◆ Racines et signe d'un trinôme factorisé.
- ✳ Associer une parabole à une expression algébrique de la forme : $x \mapsto ax^2$, $x \mapsto ax^2 + b$, $x \mapsto a(x-x_1)(x-x_2)$.
- ✳ Déterminer des éléments caractéristiques de la fonction $x \mapsto a(x-x1)(x-x2)$ (signe, extremum, allure, symétrie...).
- ✳ Vérifier une racine conjecturée.
- ✳ Savoir factoriser, dans des cas simples, une expression du second degré connaissant au moins une de ses racines.
- ✳ Utiliser la forme factorisée d'un polynôme de degré 2 pour trouver ses racines et étudier son signe.
- ✳ Résoudre des équations de la forme $x^2 = c$, avec c positif.

II. Fonctions polynômes de degré 3

1) Définitions

Définition 4 – Polynôme de degré trois

On appelle **polynôme de degré trois** toute expression pouvant se mettre sous la forme :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

où $a \in \mathbb{R}^*$ et b, c et $d \in \mathbb{R}$ sont appelés les **coefficients** de la fonction.

✎ **Exemple :** $-x^3+3x^2-2x+1$ est un polynôme de degré trois. Avec $a=-1$, $b=3$, $c=-2$ et $d=1$

2) Fonctions de la forme $x \mapsto ax^3 + d$

Propriété 7 – Variations de $x \mapsto ax^3 + d$

- Si $a > 0$, la fonction $x \mapsto ax^3 + d$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a < 0$, la fonction $x \mapsto ax^3 + d$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

✎ **Exemple :** La fonction $g(x) = -4x^3 + 10$ est décroissante car $-4 < 0$.

a) Fonctions de la forme $x \mapsto ax^3$

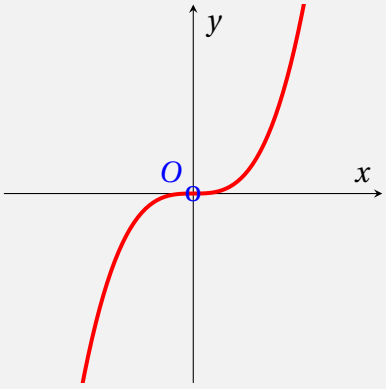
Propriété 8 – Racine cubique

Soit c un réel.
L'équation $x^3 = c$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ notée $\sqrt[3]{c}$ ou $c^{\frac{1}{3}}$.

✎ **Exemple :** $x^3 = 27 \iff x = \sqrt[3]{27} = 3$.

Propriété 9 – Symétrie des fonctions de la forme $x \mapsto ax^3$

Les courbes représentatives des fonctions de la forme $x \mapsto ax^3$ sont **symétriques par rapport à l'origine O du repère**.



b) Fonctions de la forme $x \mapsto ax^3 + d$

Méthode 2 – Racine de $x \mapsto ax^3 + d$

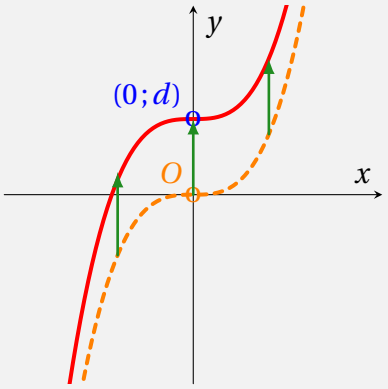
Pour trouver la racine de $x \mapsto ax^3 + d$, on résout l'équation $x^3 = -\dfrac{d}{a}$.

✎ **Exemple :** $2x^3 - 16 = 0 \iff x^3 = -\dfrac{16}{2} \iff x = \sqrt[3]{8} = 2$.

Propriété 10 – Symétrie des fonctions de la forme $x \mapsto ax^3 + d$

Les courbes représentatives des fonctions de la forme $x \mapsto ax^3 + d$ ont la **même allure** que les courbes $x \mapsto ax^3$, mais elles sont « **décalées** » de d vers le haut ou vers le bas selon le signe de d.

Elles sont donc **symétriques par rapport au point** $(0\,;d)$.



3) Fonctions de la forme $x \mapsto x(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

Propriété 11 – Forme factorisée

x_1, x_2 et x_3 sont des **racines** du polynôme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ **si et seulement si** $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

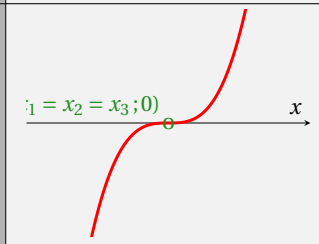
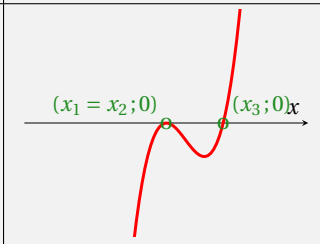
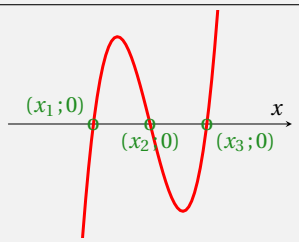
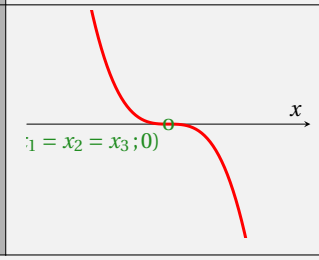
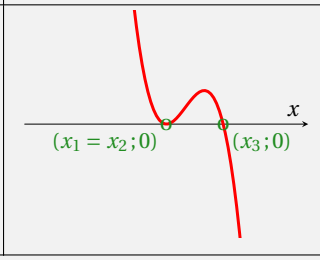
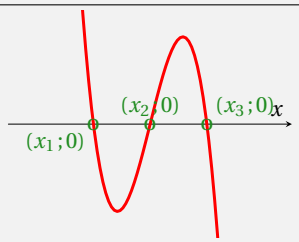
C'est la **forme factorisée** de $f(x)$.

◅ **Remarque :** Comme pour le second degré, il peut y avoir des racines doubles, voire triples.

✎ **Exemple :** La fonction $f(x) = 12(x+5)(x+2)(x-4)$, définie sur $\mathbb{R}$ s'annule en -5, -2 et 4.

Propriété 12 – Signe d'un polynôme de degré trois ◆◆◆

Soit $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.
$f(x)$ est **alternativement** du signe de $-a$ puis de a, etc. en changeant à chaque racine (si elle n'est pas double).

	Si $x_1 = x_2 = x_3$	**Si $x_1 = x_2 < x_3$**	**Si $x_1 < x_2 < x_3$**
Tableau	x : $-\infty$, $x_1 = x_2 = x_3$, $+\infty$; s. de $f(x)$: $-a$, 0, a	x : $-\infty$, $x_1 = x_2$, x_3, $+\infty$; s. de $f(x)$: $-a$, 0, $-a$, 0, a	x : $-\infty$, x_1, x_2, x_3, $+\infty$; s. de $f(x)$: $-a$, 0, a, 0, $-a$, 0, s. a
Pour $a > 0$			
Pour $a < 0$			

✎ **Exemple :**

Dressons le tableau de signe de la fonction $h : x \mapsto -3(x-2)(x+1)(x-4)$

- Les racines sont :
  $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 4$.
- $a = -3 < 0$ donc a est de signe négatif.

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Au programme :

- ◆ Représentations graphiques des fonctions : $x \mapsto ax^3$, $x \mapsto ax^3 + b$.
- ◆ Racines et signe d'un polynôme de degré 3 de la forme $x \mapsto a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.
- ◆ Équation $x^3 = c$.
- ◆ Racine cubique d'un nombre réel positif
- ◇ Notations $c^{\frac{1}{3}}$ et $\sqrt[3]{c}$.
- ✳ Vérifier qu'une valeur conjecturée est racine d'un polynôme de degré 3.
- ✳ Utiliser la forme factorisée (en produit de facteurs du premier degré) d'un polynôme de degré 3 pour trouver ses racines et étudier son signe.
- ✳ Résoudre des équations de la forme $x^3 = c$, avec c positif.