I. Taux de variation et sécantes

1) Taux de variation

Définition 1 – Taux de variation ◇◇◇

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soient trois réels a, b et h tels que $a \in I$, $b = a+h \in I$:

- Le **taux de variation** (ou taux d'accroissement) de la fonction f entre a et $b = a+h$ est le nombre :
$$\tau_{f(a;b)} = \frac{\Delta f}{\Delta x}(a;b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
- ou également :
$$\tau_{f(a;a+h)} = \frac{\Delta f}{\Delta x}(a;a+h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

◅ **Remarque :**
Le taux de variation, mesure la variation moyenne de la fonction entre a et b ou depuis a avec un décalage de h.

✎ **Exemple :**

1. Calculons le taux de variation de la fonction $f(x) = x^3 - 2x^2 - x$ entre 1 et 3 :
   - $f(1) = 1^3 - 2\times 1^2 - 1 = 1 - 2 - 1 = -2$
   - $f(3) = 3^3 - 2\times 3^2 - 3 = 27 - 18 - 3 = 6$
   - $\tau_{f(1;3)} = \frac{\Delta f}{\Delta x}(1;3) = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{6-(-2)}{3-1} = \frac{8}{2} = 4$
2. Calculons le taux de variation de la fonction f depuis -1 avec un décalage de 1 :
   - $f(-1) = (-1)^3 - 2\times(-1)^2 - (-1) = -1 - 2 + 1 = -2$
   - $f(-1+1) = f(0) = 0^3 - 2\times 0^2 - 0 = 0 - 0 - 0 = 0$
   - $\tau_{f(-1;-1+1)} = \frac{\Delta f}{\Delta x}(-1;-1+1) = \frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)} = \frac{0-(-2)}{0-1} = \frac{2}{1} = 2$

Au programme :

◇ Taux de variation.

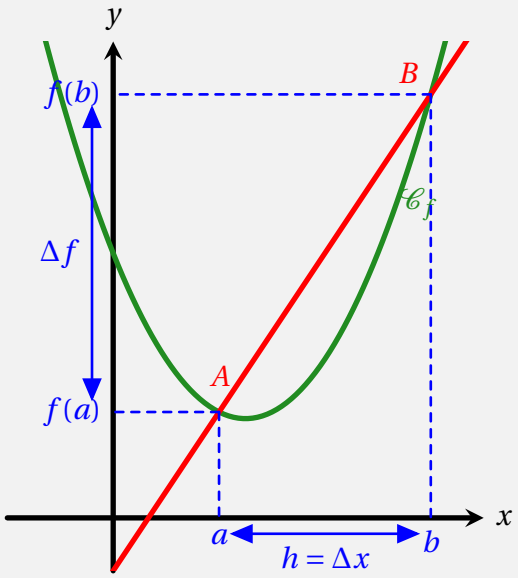
✳ Calculer un taux de variation.

2) Sécantes

Propriété 1 – Pente d'une sécante ◆◆◆

Soient $A\big(a;f(a)\big)$ et $B\big(b;f(b)\big)$ deux points de la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f :

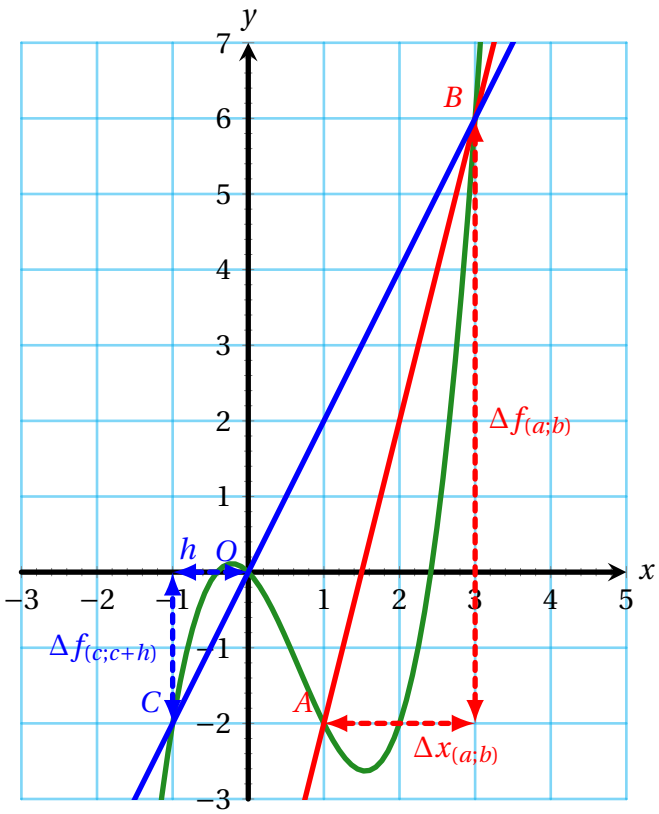
- Le taux de variation $\tau_{f(a;b)}$ correspond au **coefficient directeur** (à la **pente**) de la droite (AB) **sécante** à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f aux points d'abscisses a et $b = a+h$.



✎ **Exemple :**

En reprenant les deux exemples précédents et les points $A(1;-2)$, $B(3;6)$, $C(-1;-2)$ et $O(0,0)$:

- La pente de (AB) est $\tau_{f(1;3)} = 4$.
- Le coefficient directeur de (CO) est $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}(-1;0) = 2$.



Au programme :

- ◆ Sécantes à une courbe passant par un point donné.
- ◇ Taux de variation en un point.

II. Nombre dérivé et tangentes

1) Nombre dérivé

Définition 2 – Dérivabilité et nombre dérivé

Une fonction f est dit **dérivable** en a si et seulement si le **taux de variation** de f entre a et $a+h$ **tend vers un unique nombre réel** lorsque $\boldsymbol{h}$ **tend vers 0**.

Ce nombre réel est appelé **nombre dérivé de $\boldsymbol{f}$ en** a et se note $\boldsymbol{f'(a)}$.

$$\boldsymbol{f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

Remarque : « Tendre vers un nombre » signifie « se rapprocher de plus en plus, sans l'atteindre ».

Remarque : On peut aussi faire se rapprocher b de a : $f'(a) = \lim\limits_{b\to a} \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Remarque :

Le nombre dérivé peut aussi se noter $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$, c'est la notation de Leibniz, très utilisée en sciences.

Exemple :

Soit $f : x \mapsto x^2$ et h un réel non nul.

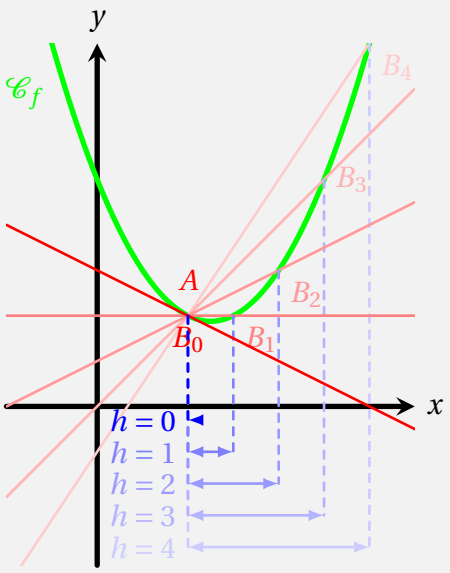
- Le taux de variation de f depuis 3 en décalant de h est :
  $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}(3;3+h) = \dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = \dfrac{(3+h)^2-3^2}{h} = \dfrac{9+6h+h^2-9}{h} = \dfrac{6h+h^2}{h} = \dfrac{h(6+h)}{h} = 6+h$
- Si h tend vers 0 alors $6+h$ tend vers 6.
- Le taux de variation de f depuis 3 en décalant de h tend vers un unique nombre 6.
- La fonction f est donc dérivable en 3 et son nombre dérivé en 3 est égal à 6.
- On note $f'(3) = 6$.

2) Tangente

Propriété 2 – Coefficient directeur de la tangente ◆◆◆

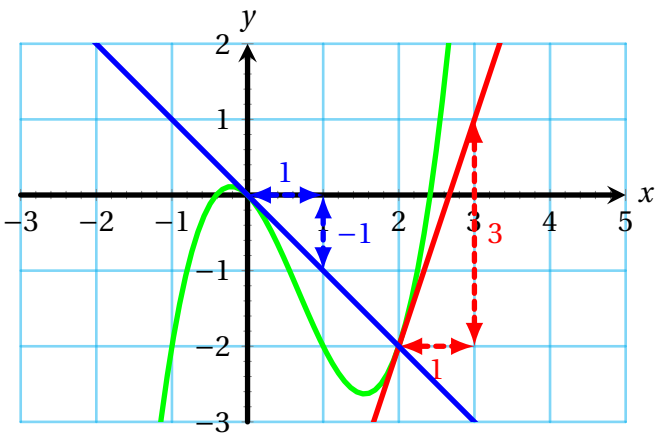
Soient $A\big(a;f(a)\big)$ et $B\big(b;f(b)\big)$, avec $b=a+h$ deux points de la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f une fonction dérivable en a.

- Lorsque h tend vers 0, le point B tend vers le point A et la sécante (AB) tend vers la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A.
- Ainsi, le nombre dérivé $f'(a)$ est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.



✎ **Exemple :**

En reprenant la fonction $f(x)=x^3-2x^2-x$ et sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$.



1. Il est possible de déterminer le nombre dérivé $f'(2)$ en mesurant la pente de la tangente à f au point d'abscisse 2. Ainsi, $f'(2)=3$.
2. Il est possible de tracer la tangente de $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 en calculant $f'(0)$.
   - $f(0)=0^3-2\times0^2-0=0$
   - $f(0+h)=f(h)=h^3-2\times h^2-h=h(h^2-2h-1)$
   - $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}(0;h)=\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\dfrac{h(h^2-2h-1)}{h}=h^2-2h-1$
   - Si h tend vers 0, on a $f'(0)=-1$, c'est le coefficient directeur de la tangente à tracer.

3) Équation de la tangente

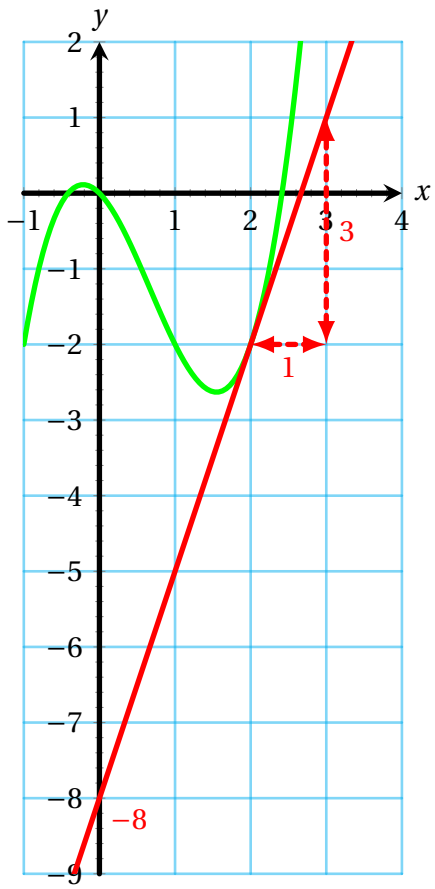
Théorème 1 – Équation de la tangente ◆◆◆

Soit f une fonction dérivable en a.
L'**équation réduite de la tangente** à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

✎ **Exemple :**

Reprenons l'exemple précédent où $f(x) = x^3 - 2x^2 - x$, $f'(2) = 3$ et $f(2) = -2$.



- L'équation de la tangente de $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 est :
  $y = f'(2)(x-2) + f(2) = 3(x-2) - 2 = 3x - 6 - 2 = 3x - 8$
- Remarquons que la pente et l'ordonnées à l'origine de la tangente lues graphiquement sont cohérentes avec ce résultat.

Au programme :

- ◇ Nombre dérivé en un point défini comme limite du taux de variation en ce point.
- ◇ Tangente à une courbe en un point, définie comme position limite des sécantes passant par ce point.
- ◆ Équation de la tangente : $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.
- ✳ Interpréter géométriquement le nombre dérivé comme coefficient directeur de la tangente.
- ✳ Construire la tangente à une courbe en un point.
- ✳ Déterminer l'équation réduite de la tangente à une courbe en un point.

III. Fonction dérivée

1) Définition

Définition 3 – Fonction dérivable sur un intervalle

On dit qu'une **fonction est dérivable sur un intervalle *I*** si elle est dérivable **en tout réel** a de I.

✎ **Exemple :**

Soit la fonction $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. Soit a un réel et h un réel non nul.

- Le taux de variation de f entre a et $a+h$ est :
- $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{(a+h)^2-a^2}{h} = \dfrac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \dfrac{2ah+h^2}{h} = \dfrac{h(2a+h)}{h} = 2a+h$.
- Quel que soit le réel a, si h tend vers 0 alors le taux de variation entre a et $a+h$ tend vers un unique nombre : $2a$.
- Ainsi, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Définition 4 – Fonction dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- On appelle **fonction dérivée de la fonction *f***, et on la note ***f'***, la fonction qui à tout réel x de I associe le réel $f'(x)$.

✎ **Exemple :**

D'après les calculs effectués dans l'exemple précédent, si $f(x) = x^2$, quelque soit le réel $x \in I$, $f'(a) = 2a$.
Aussi, la fonction dérivée f' de f est la fonction qui à tout réel x associe $f'(x) = 2x$.

2) Dérivées à connaître

Propriété 3 – Quelques dérivées à connaître

Nom	Fonction	*avec*	Dérivée	Ensemble de dérivabilité
constante	$f(x) = k$	$k \in \mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
« linéaire »	$f(x) = x$		1	$\mathbb{R}$
carré	$f(x) = x^2$		$2x$	$\mathbb{R}$
cube	$f(x) = x^3$		$3x^2$	$\mathbb{R}$

3) Dérivées d'un polynôme

Propriété 4 – Combinaisons linéaires ◆◆◆

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors sur cet intervalle :

Fonction	*avec*	Dérivée
$u+v$		$u'+v'$
ku	$k \in \mathbb{R}$	ku'

✎ **Exemple :**

1. Pour calculer la dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=3x^2$:
   - On pose : $u(x)=x^2$ et $k=3$
   - Alors : $u'(x)=2x$
   - Ainsi : $g'(x)=k\times u'(x)=3\times 2x=6x$
2. Pour calculer la dérivée de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=4x$:
   - On pose : $v(x)=x$ et $l=4$
   - Alors : $v'(x)=1$
   - Ainsi : $h'(x)=l\times v'(x)=4\times 1=4$
3. Pour calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2+4x$:
   - On pose : $g(x)=3x^2$ et $h(x)=4x$
   - Alors : $g'(x)=6x$ et $h'(x)=4$
   - Ainsi : $f'(x)=g'(x)+h'(x)=6x+4$

Propriété 5 – Dérivées d'un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 ◆◆◆

Soit $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ une fonction **polynôme de degré 3** (ou moins) avec a, b, c et d des réels.

- f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $\boldsymbol{f'(x)=3ax^2+2bx+c}$.

◅ **Remarque :** Les réels a, b, c et d peuvent éventuellement être nuls.

✎ **Exemple :** Si $g(x)=4x^3+3x^2-4x+7$, alors $g'(x)=3\times 4x^2+2\times 3x-4=12x^2+6x-4$

Au programme :

- ◇ Fonction dérivée.
- ◆ Fonctions dérivées de : $x\mapsto x^2$, $x\mapsto x^3$.
- ◆ Dérivée d'une somme, dérivée de kf avec $k\in\mathbb{R}$, dérivée d'un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.
- ✳ Calculer la dérivée d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à trois.

IV. Étude de fonctions

Propriété 6 – Variations et dérivée ◆◆◆

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et de dérivée est f'.

Le **signe de f'** donne les **variations de f** :

- Si f' est **positive** sur I, alors f est **croissante** sur I.
- Si f' est **négative** sur I, alors f est **décroissante** sur I.

Propriété 7 – Extremum local ◆

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et de dérivée est f'.

Si f' s'annule et change de signe en une valeur $a \in I$, on dit que f atteint un **extremum local** en a.

Méthode 1 – Construire algébriquement un tableau de variations ❑❑❑

Pour étudier les variations d'une fonction f :

1. On calcule sa **dérivée** f'.
2. On dresse le **tableau de signes** de f' (en résolvant $f'(x) > 0$).
3. On en déduit le **tableau de variations** de f.
4. On calcule les **extremums** et les **bornes** de la fonction f.

✎ **Exemple :**

Pour étudier les variations de la fonction f définie sur $[-3;3]$ par $f(x) = 3x^2 + 6x + 1$:

1. $f'(x) = 6x + 6$
2. $f'(x) > 0 \iff 6x + 6 > 0 \iff 6x > -6 \iff x > -1$

x	-3		-1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

3.
   - $f(-3) = 3 \times (-3)^2 + 6 \times (-3) + 1 = 10$
   - $f(-1) = 3 \times (-1)^2 + 6 \times (-1) + 1 = -2$
   - $f(3) = 3 \times 3^2 + 6 \times 3 + 1 = 46$

4.

x	-3		-1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	10	↘	-2	↗	46

Au programme :

- ◆ Sens de variation d'une fonction et signe de la dérivée.
- ◆ Tableau de variations, extremums.
- ✳ Déterminer le sens de variation et les extremums d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3.