Probabilités et variables aléatoires

Stats / probas

Définition 1 – Indépendance

Deux expériences sont dites **indépendantes** si le résultat de l'une n'a **aucune influence** sur le résultat de l'autre.

✎ **Exemple :**

Définition 1 – Indépendance

Deux expériences sont dites **indépendantes** si le résultat de l'une n'a **aucune influence** sur le résultat de l'autre.

✎ **Exemple :**

Tom ne sait pas quoi manger à la cantine aujourd'hui. Il décide donc de tout choisir au hasard, parmi :

- Entrées : salade, avocat ou œuf.
- Plats : lasagne, gratin de courgettes.

Comme à chaque étape il procède à un nouveau choix au hasard, les deux tirages sont ..... .

Définition 1 – Indépendance

Deux expériences sont dites **indépendantes** si le résultat de l'une n'a **aucune influence** sur le résultat de l'autre.

✎ **Exemple :**

Tom ne sait pas quoi manger à la cantine aujourd'hui. Il décide donc de tout choisir au hasard, parmi :

- Entrées : salade, avocat ou œuf.
- Plats : lasagne, gratin de courgettes.

Comme à chaque étape il procède à un nouveau choix au hasard, les deux tirages sont indépendants.

Propriété 1 – Indépendance et intersection

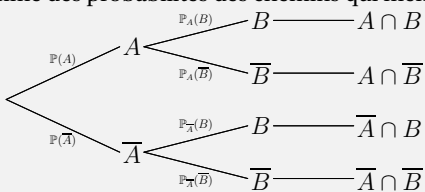
A et B sont indépendants si et seulement si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Méthode 1 – Arbre pondéré

Un **arbre pondéré** est un arbre dont chaque branche est marquée d'une probabilité. Pour représenter une expérience aléatoire, on peut utiliser un arbre pondéré qui est construit selon les règles suivantes :

- **Règle de la somme** *(loi de probabilité)* :
  la somme des probabilités sur les branches partant d'un même nœud est égale à 1.
- **Règle du produit** *(probabilité conditionnelle)* :
  la probabilité d'un chemin, constitué d'une succession de branches, est égale au produit des probabilités inscrites sur ses branches.
- **Probabilité d'un évènement** *(probabilité totale)* :
  la probabilité d'un évènement E, inscrit aux extrémités de plusieurs chemins, est égale à la somme des probabilités des chemins qui mènent à E.



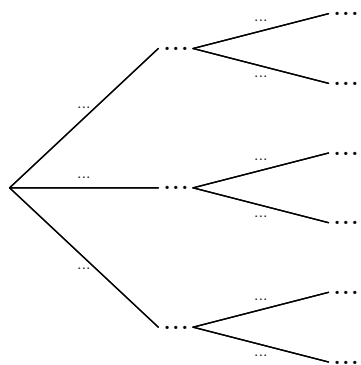
✎ **Exemple :**

✎ **Exemple :**

En reprenant le choix de menu précédent :

- En notant E_1 l'évènement choisir la salade, etc. La probabilité pour chaque entrée est de $\mathbb{P}(E_i) =$ … , car nous sommes dans une situation d'équiprobabilité.
- De même la probabilité pour chaque plat est de $\mathbb{P}(P_i) =$ … .

Ainsi, la probabilité que Tom finisse avec un gratin et des œufs et de : $\mathbb{P}(E_3 \cap P_2) =$ ……… .

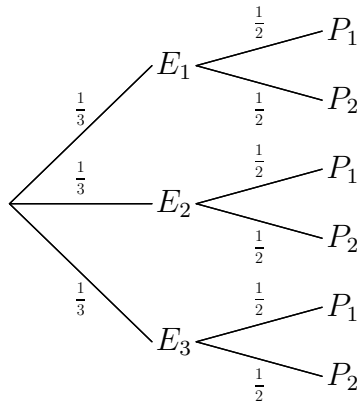


✎ **Exemple :**

En reprenant le choix de menu précédent :

- En notant E_1 l'évènement choisir la salade, etc. La probabilité pour chaque entrée est de $\mathbb{P}(E_i) = \dfrac{1}{3}$, car nous sommes dans une situation d'équiprobabilité.
- De même la probabilité pour chaque plat est de $\mathbb{P}(P_i) = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, la probabilité que Tom finisse avec un gratin et des œufs et de : $\mathbb{P}(E_3 \cap P_2) = \mathbb{P}(E_3) \times \mathbb{P}(P_2) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$.



Définition 2 – Variable aléatoire réelle (discrète)

Soit Ω l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire (l'univers).

Une **variable aléatoire** sur Ω est une **fonction** définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarque : On définit donc une variable aléatoire X sur Ω en associant un réel à chaque issue.

✎ **Exemple :**

✎ **Exemple :**

Basons nos exemples sur le jeu de dé suivant :

- Il faut miser 1 € pour jouer.
- On lance le dé :
  - si le résultat est un multiple de 2, on remporte 1 €.
  - si le résultat est un multiple de 2, on remporte 2 €.
  - les deux gains précédents peuvent se cumuler.

On peut donc définir une variable aléatoire X correspondant au gain total (incluant la mise) :

- $X =$ .. , en cas d'échec, si le résultat du dé est ..... .
- $X =$. , si le résultat du dé est ..... .
- $X =$. , si le résultat du dé est .. .
- $X =$. , si le résultat du dé est .. .

✎ **Exemple :**

Basons nos exemples sur le jeu de dé suivant :

- Il faut miser 1 € pour jouer.
- On lance le dé :
  - si le résultat est un multiple de 2, on remporte 1 €.
  - si le résultat est un multiple de 2, on remporte 2 €.
  - les deux gains précédents peuvent se cumuler.

On peut donc définir une variable aléatoire X correspondant au gain total (incluant la mise) :

- $X = -1$, en cas d'échec, si le résultat du dé est 0 ou 5.
- $X = 0$, si le résultat du dé est 2 ou 4.
- $X = 1$, si le résultat du dé est 3.
- $X = 2$, si le résultat du dé est 6.

Définition 3 – Évènement à l'aide d'une variable aléatoire

Soient X une variable aléatoire définie sur Ω et x un réel :

- L'évènement « $\boldsymbol{X}$ **prend la valeur** $\boldsymbol{x}$ » est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe x ;

  on le note $\{\boldsymbol{X = x}\}$.

- L'évènement « $\boldsymbol{X}$ **prend des valeurs supérieures ou égales à** $\boldsymbol{x}$ » est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe un réel supérieur ou égal à x ;

  on le note $\{\boldsymbol{X \geqslant x}\}$.

- On définit de même $\{X \leqslant x\}$, $\{X > x\}$ et $\{X < x\}$.

✎ **Exemple :**

✎ **Exemple :**

- L'évènement $\{X = 1\}$ correspond aux gains de ..... , c'est-à-dire aux résultats du dé ..... .
- L'évènement $\{X \leqslant 0\}$ correspond aux gains de ..... , c'est-à-dire aux résultats du dé ..... .

✎ **Exemple :**

- L'évènement $\{X = 1\}$ correspond aux gains de 1 euro, c'est-à-dire aux résultats du dé 2 et 4.
- L'évènement $\{X \leqslant 0\}$ correspond aux gains de moins de 0 euro, c'est-à-dire aux résultats du dé 1 ; 2 ; 4 et 5.

Définition 4 – Probabilité à l'aide d'une variable aléatoire

La **probabilité de l'évènement** $\{X = x\}$ est la **somme des probabilités** des issues de Ω auxquelles on associe le réel x, on la note $\mathbb{P}(\boldsymbol{X = x})$.

Remarque : La notation $\mathbb{P}(X = x)$ est abus d'écriture allégeant $\mathbb{P}(\{X = x\})$.

Exemple :

Définition 4 – Probabilité à l'aide d'une variable aléatoire

La **probabilité de l'évènement** $\{X = x\}$ est la **somme des probabilités** des issues de Ω auxquelles on associe le réel x, on la note $\mathbb{P}(\boldsymbol{X = x})$.

Remarque : La notation $\mathbb{P}(X = x)$ est abus d'écriture allégeant $\mathbb{P}(\{X = x\})$.

Exemple : En jouant au jeu précédent avec un dé non truqué : $\mathbb{P}(X = 1) =$ … et $\mathbb{P}(X \leqslant 0) =$ ….

Définition 4 – Probabilité à l'aide d'une variable aléatoire

La **probabilité de l'évènement** $\{X = x\}$ est la **somme des probabilités** des issues de Ω auxquelles on associe le réel x, on la note $\mathbb{P}(\boldsymbol{X = x})$.

Remarque : La notation $\mathbb{P}(X = x)$ est abus d'écriture allégeant $\mathbb{P}(\{X = x\})$.

Exemple : En jouant au jeu précédent avec un dé non truqué : $\mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{1}{6}$ et $\mathbb{P}(X \leqslant 0) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

Définition 5 – Loi de probabilité

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω.

Définir la **loi de probabilité** de la variable aléatoire X, c'est associer à chaque valeur x_i prise par X la probabilité $\mathbb{P}(X = x_i)$ de l'évènement $\{X = x_i\}$.

On présente souvent la loi de probabilité de X sous la forme d'un tableau :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$\mathbb{P}(X = x_i)$	p_1	p_2	...	$p_n = \mathbb{P}(X = x_n)$

Remarque : On se rappellera que la somme des probabilités est toujours égale à 1 : $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

✎ **Exemple :**

✎ **Exemple :**

Ci-dessous la loi de probabilité correspondant aux gains de notre jeu :

x_i	...	..	..	..
$\mathbb{P}(X = x_i)$	...	...	...	...

✎ **Exemple :**

Ci-dessous la loi de probabilité correspondant aux gains de notre jeu :

x_i	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Définition 6 – Espérance ◇◇◇

L'**espérance** de la variable aléatoire X est le nombre réel : $\mathbb{E}(X) = x_1 \times p_1 + \ldots + x_n \times p_n$

✎ **Exemple :**

Définition 6 – Espérance ◇◇◇

L'**espérance** de la variable aléatoire X est le nombre réel : $\mathbb{E}(X) = x_1 \times p_1 + ... + x_n \times p_n$

✎ **Exemple :** Dans notre jeu : $\mathbb{E}(X) =$ .....

Définition 6 – Espérance ◇◇◇

L'**espérance** de la variable aléatoire X est le nombre réel : $\mathbb{E}(X) = x_1 \times p_1 + \ldots + x_n \times p_n$

✎ **Exemple :** Dans notre jeu : $\mathbb{E}(X) = -1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} = -\frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$

Propriété 2 – Loi des grands nombres

Après un très grand nombre de réalisations de l'expérience aléatoire associée à X, la valeur moyenne prise par la variable aléatoire X se rapproche de l'espérance de X.

✎ **Exemple :**

Propriété 2 – Loi des grands nombres

Après un très grand nombre de réalisations de l'expérience aléatoire associée à X, la valeur moyenne prise par la variable aléatoire X se rapproche de l'espérance de X.

✎ **Exemple :** En jouant un grand nombre de fois, on s'attend à gagner en moyenne ..... par partie.

Propriété 2 – Loi des grands nombres

Après un très grand nombre de réalisations de l'expérience aléatoire associée à X, la valeur moyenne prise par la variable aléatoire X se rapproche de l'espérance de X.

✎ **Exemple :** En jouant un grand nombre de fois, on s'attend à gagner en moyenne $\frac{1}{6} \approx 0,16$ € par partie.

Définition 7 – Épreuve de Bernoulli ◇◇◇

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire comportant exactement **deux issues** :

- une issue appelée **succès** (de valeur 1).
- et l'autre appelée **échec** (de valeur 0).

Le paramètre de cette épreuve, noté p, correspond à la probabilité de succès.

✎ **Exemple :**

Définition 7 – Épreuve de Bernoulli ◇◇◇

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire comportant exactement **deux issues** :

- une issue appelée **succès** (de valeur 1).
- et l'autre appelée **échec** (de valeur 0).

Le paramètre de cette épreuve, noté p, correspond à la probabilité de succès.

✎ **Exemple :**

On répond au hasard à une question Kahoot! où quatre réponses sont proposées et dont une seule est juste.
Si on appelle succès l'évènement « La réponse choisie est juste » de probabilité … , alors l'expérience définit une ..... de paramètre $p =$ ..... .

Définition 7 – Épreuve de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire comportant exactement **deux issues** :

- une issue appelée **succès** (de valeur 1).
- et l'autre appelée **échec** (de valeur 0).

Le paramètre de cette épreuve, noté p, correspond à la probabilité de succès.

✎ **Exemple :**

On répond au hasard à une question Kahoot! où quatre réponses sont proposées et dont une seule est juste.

Si on appelle succès l'évènement « La réponse choisie est juste » de probabilité $\frac{1}{4}$, alors l'expérience définit une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{4} = 0,25$.

Propriété 3 – Loi de probabilité d'une épreuve de Bernoulli ◆◆◆

Soit X une variable aléatoire associée à une épreuve de Bernoulli de paramètre p. Alors la loi de probabilité de X est :

x_i	0	1
$\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$	$1-p$	p

◅ **Remarque :** Il est fréquent de noter $q = 1 - p$ la probabilité d'échec.

✎ **Exemple :**

Propriété 3 – Loi de probabilité d'une épreuve de Bernoulli ◆◆◆

Soit X une variable aléatoire associée à une épreuve de Bernoulli de paramètre p. Alors la loi de probabilité de X est :

x_i	0	1
$\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$	$1-p$	p

◅ **Remarque :** Il est fréquent de noter $q = 1 - p$ la probabilité d'échec.

✎ **Exemple :**

En reprenant le réponse au Kahoot!, la loi de probabilité est :

x_i	0	1
$\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$	…	…

Propriété 3 – Loi de probabilité d'une épreuve de Bernoulli ◆◆◆

Soit X une variable aléatoire associée à une épreuve de Bernoulli de paramètre p. Alors la loi de probabilité de X est :

x_i	0	1
$\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$	$1-p$	p

◅ **Remarque :** Il est fréquent de noter $q = 1 - p$ la probabilité d'échec.

✎ **Exemple :**

En reprenant le réponse au Kahoot !, la loi de probabilité est :

x_i	0	1
$\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Propriété 4 – Espérance d'une épreuve de Bernoulli ◆◆◆

L'espérance d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p est aussi p :

$$\mathbb{E}(X) = 1 \times p + 0 \times (1-p) = \boldsymbol{p}$$

✎ **Exemple :**

Propriété 4 – Espérance d'une épreuve de Bernoulli ◆◆◆

L'espérance d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p est aussi p :

$$\mathbb{E}(X) = 1 \times p + 0 \times (1-p) = \boldsymbol{p}$$

✎ **Exemple :**

En répondant au hasard aux Kahoot!, au bout d'un très grand nombre de questions, on aura en moyenne répondu juste à . question sur . .
$\mathbb{E}(X) =$ ..... .

Propriété 4 – Espérance d'une épreuve de Bernoulli ◆◆◆

L'espérance d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p est aussi p :

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{X}) = 1 \times p + 0 \times (1-p) = \boldsymbol{p}$$

✎ **Exemple :**

En répondant au hasard aux Kahoot!, au bout d'un très grand nombre de questions, on aura en moyenne répondu juste à 1 question sur 4.

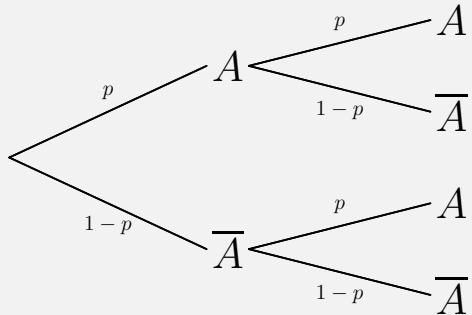
$\mathbb{E}(X) = p = \dfrac{1}{4}$.

Définition 8 – Schéma de Bernoulli

Un **schéma de Bernoulli** est la **répétition** d'épreuves de **Bernoulli identiques** et **indépendantes**.

Les paramètres d'un schéma de Bernoulli sont :

- le nombre n de répétitions de l'épreuve de Bernoulli ;
- la probabilité de succès p de cette épreuve.



✎ **Exemple :**

✎ **Exemple :**

Une urne contient 5 boules rouges et 15 boules noires.

- On prend une boule dans l'urne en souhaitant tirer une boule rouge.
- On la remet puis tire une nouvelle boule.
- On répète le processus jusqu'à avoir tiré 40 boules.

Ainsi, on répète … fois de manière …… et …… l'expérience ayant …… issues :

- le succès : « On obtient une boule ……. » de probabilité $p =$ ……
- l'échec : « On obtient une boule …… » de probabilité ……

L'expérience définit donc un schéma de Bernoulli de paramètres $n =$ … et $p =$ …..

✎ **Exemple :**

Une urne contient 5 boules rouges et 15 boules noires.

- On prend une boule dans l'urne en souhaitant tirer une boule rouge.
- On la remet puis tire une nouvelle boule.
- On répète le processus jusqu'à avoir tiré 40 boules.

Ainsi, on répète 40 fois de manière identique et indépendante l'expérience ayant deux issues :

- le succès : « On obtient une boule rouge » de probabilité $p = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 0,25$
- l'échec : « On obtient une boule noire » de probabilité $1 - p = 0,75$

L'expérience définit donc un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 40$ et $p = 0,25$

Définition 9 – Échantillon

Lorsque l'on réalise plusieurs fois une même expérience aléatoire de manière indépendante (c'est-à-dire que les différentes réalisations n'ont pas d'influence les unes sur les autres), l'ensemble des résultats obtenus est appelé **échantillon**.
Le nombre de fois où l'expérience est réalisée est appelée **taille** de l'échantillon.

✎ **Exemple :**

Définition 9 – Échantillon

Lorsque l'on réalise plusieurs fois une même expérience aléatoire de manière indépendante (c'est-à-dire que les différentes réalisations n'ont pas d'influence les unes sur les autres), l'ensemble des résultats obtenus est appelé **échantillon**.
Le nombre de fois où l'expérience est réalisée est appelée **taille** de l'échantillon.

✎ **Exemple :**

- Si l'on lance 10 fois un dé équilibré à 6 faces et qu'on observe le résultat obtenu, on obtient un échantillon de taille … .
- Si l'on tire au sort 1 000 personnes dans la population française et que l'on observe si la personne est droitière ou non, on obtient un échantillon de taille …… .

Définition 9 – Échantillon

Lorsque l'on réalise plusieurs fois une même expérience aléatoire de manière indépendante (c'est-à-dire que les différentes réalisations n'ont pas d'influence les unes sur les autres), l'ensemble des résultats obtenus est appelé **échantillon**.
Le nombre de fois où l'expérience est réalisée est appelée **taille** de l'échantillon.

✎ **Exemple :**

- Si l'on lance 10 fois un dé équilibré à 6 faces et qu'on observe le résultat obtenu, on obtient un échantillon de taille 10.
- Si l'on tire au sort 1 000 personnes dans la population française et que l'on observe si la personne est droitière ou non, on obtient un échantillon de taille 1 000.

Méthode 2 – Simulation

On peut **simuler** informatiquement une expérience aléatoire à deux issues x_1 et x_2 de probabilité respectives p et $1-p$ en générant un nombre réel aléatoire entre 0 et 1 et en considérant que :

- x_1 est réalisée si ce nombre aléatoire est inférieur ou égal à p ;
- x_2 est réalisée sinon.

Remarque :

Si les probabilités sont simples, on peut aussi générer des nombres entiers directement.

Définition 10 – Fluctuation d'échantillonnage

Deux échantillons (obtenus par l'expérience ou simulés) de même taille associés à une même expérience aléatoire ne sont, *a priori*, pas identiques : ce phénomène s'appelle la **fluctuation d'échantillonnage**

✎ **Exemple :**

Définition 10 – Fluctuation d'échantillonnage

Deux échantillons (obtenus par l'expérience ou simulés) de même taille associés à une même expérience aléatoire ne sont, *a priori*, pas identiques : ce phénomène s'appelle la **fluctuation d'échantillonnage**

✎ **Exemple :**

Si l'on lance dix fois un dé à 6 faces puis que l'on recommence, les résultats des dix premiers lancers ..... aux dix suivants.

Définition 10 – Fluctuation d'échantillonnage

Deux échantillons (obtenus par l'expérience ou simulés) de même taille associés à une même expérience aléatoire ne sont, *a priori*, pas identiques : ce phénomène s'appelle la **fluctuation d'échantillonnage**

✎ **Exemple :**

Si l'on lance dix fois un dé à 6 faces puis que l'on recommence, les résultats des dix premiers lancers ne seront pas identiques aux dix suivants.