Probabilités et variables aléatoires

I. Répétitions d'expériences indépendantes

Définition 1 – Indépendance ◆◇◆◇

Deux expériences sont dites **indépendantes** si le résultat de l'une n'a **aucune influence** sur le résultat de l'autre.

✎ **Exemple :**

Tom ne sait pas quoi manger à la cantine aujourd'hui. Il décide donc de tout choisir au hasard, parmi :

- Entrées : salade, avocat ou œuf.
- Plats : lasagne, gratin de courgettes.

Comme à chaque étape il procède à un nouveau choix au hasard, les deux tirages sont indépendants.

Propriété 1 – Indépendance et intersection ◆◆

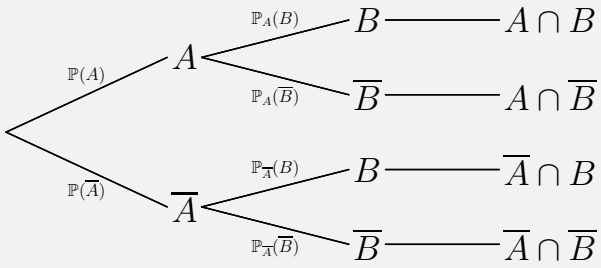
A et B sont indépendants si et seulement si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Méthode 1 – Arbre pondéré

Un **arbre pondéré** est un arbre dont chaque branche est marquée d'une probabilité.
Pour représenter une expérience aléatoire, on peut utiliser un arbre pondéré qui est construit selon les règles suivantes :

- **Règle de la somme** *(loi de probabilité)* :
  la somme des probabilités sur les branches partant d'un même nœud est égale à 1.
- **Règle du produit** *(probabilité conditionnelle)* :
  la probabilité d'un chemin, constitué d'une succession de branches, est égale au produit des probabilités inscrites sur ses branches.
- **Probabilité d'un évènement** *(probabilité totale)* :
  la probabilité d'un évènement E, inscrit aux extrémités de plusieurs chemins, est égale à la somme des probabilités des chemins qui mènent à E.

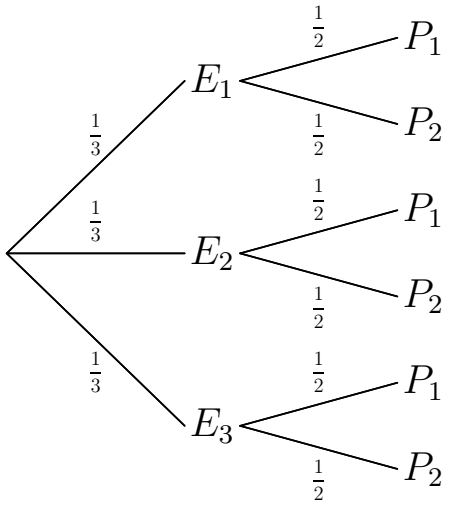


✎ **Exemple :**

En reprenant le choix de menu précédent :

- En notant E_1 l'évènement choisir la salade, etc. La probabilité pour chaque entrée est de $\mathbb{P}(E_i) = \dfrac{1}{3}$, car nous sommes dans une situation d'équiprobabilité.
- De même la probabilité pour chaque plat est de $\mathbb{P}(P_i) = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, la probabilité que Tom finisse avec un gratin et des œufs et de : $\mathbb{P}(E_3 \cap P_2) = \mathbb{P}(E_3) \times \mathbb{P}(P_2) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$.



Au programme :

- ◆ Probabilité associée à une expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes.
- ✳ Représenter par un arbre de probabilités une expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes et déterminer les probabilités des évènements associées aux différents chemins.

II. Variable aléatoire

1) Variables aléatoires réelles

Définition 2 – Variable aléatoire réelle (discrète)

Soit Ω l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire (l'univers).

Une **variable aléatoire** sur Ω est une **fonction** définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarque : On définit donc une variable aléatoire X sur Ω en associant un réel à chaque issue.

Exemple :

Basons nos exemples sur le jeu de dé suivant :

- Il faut miser 1 € pour jouer.
- On lance le dé :
  - si le résultat est un multiple de 2, on remporte 1 €.
  - si le résultat est un multiple de 2, on remporte 2 €.
  - les deux gains précédents peuvent se cumuler.

On peut donc définir une variable aléatoire X correspondant au gain total (incluant la mise) :

- $X = -1$, en cas d'échec, si le résultat du dé est 0 ou 5.
- $X = 0$, si le résultat du dé est 2 ou 4.
- $X = 1$, si le résultat du dé est 3.
- $X = 2$, si le résultat du dé est 6.

Définition 3 – Évènement à l'aide d'une variable aléatoire

Soient X une variable aléatoire définie sur Ω et x un réel :

- L'évènement « $\boldsymbol{X}$ **prend la valeur** $\boldsymbol{x}$ » est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe x ;

  on le note $\{\boldsymbol{X = x}\}$.

- L'évènement « $\boldsymbol{X}$ **prend des valeurs supérieures ou égales à** $\boldsymbol{x}$ » est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe un réel supérieur ou égal à x ;

  on le note $\{\boldsymbol{X \geqslant x}\}$.

- On définit de même $\{X \leqslant x\}$, $\{X > x\}$ et $\{X < x\}$.

Exemple :

- L'évènement $\{X = 1\}$ correspond aux gains de 1 euro, c'est-à-dire aux résultats du dé 2 et 4.
- L'évènement $\{X \leqslant 0\}$ correspond aux gains de moins de 0 euro, c'est-à-dire aux résultats du dé 1 ; 2 ; 4 et 5.

2) Loi de probabilité

Définition 4 – Probabilité à l'aide d'une variable aléatoire

La **probabilité de l'évènement** $\{X = x\}$ est la **somme des probabilités** des issues de Ω auxquelles on associe le réel x, on la note $\mathbb{P}(\boldsymbol{X = x})$.

Remarque : La notation $\mathbb{P}(X = x)$ est abus d'écriture allégeant $\mathbb{P}(\{X = x\})$.

Exemple : En jouant au jeu précédent avec un dé non truqué : $\mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{1}{6}$ et $\mathbb{P}(X \leqslant 0) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

Définition 5 – Loi de probabilité

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω.

Définir la **loi de probabilité** de la variable aléatoire X, c'est associer à chaque valeur x_i prise par X la probabilité $\mathbb{P}(X = x_i)$ de l'évènement $\{X = x_i\}$.

On présente souvent la loi de probabilité de X sous la forme d'un tableau :

$\boldsymbol{x_i}$	x_1	x_2	...	x_n
$\mathbb{P}(\boldsymbol{X = x_i})$	p_1	p_2	...	$p_n = \mathbb{P}(X = x_n)$

Remarque : On se rappellera que la somme des probabilités est toujours égale à 1 : $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

Exemple :

Ci-dessous la loi de probabilité correspondant aux gains de notre jeu :

$\boldsymbol{x_i}$	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(\boldsymbol{X = x_i})$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{6}$

3) Espérance

Définition 6 – Espérance

L'**espérance** de la variable aléatoire X est le nombre réel : $\mathbb{E}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{x_1 \times p_1 + ... + x_n \times p_n}$

Exemple : Dans notre jeu : $\mathbb{E}(X) = -1 \times \dfrac{1}{3} + 0 \times \dfrac{1}{3} + 1 \times \dfrac{1}{6} + 2 \times \dfrac{1}{6} = -\dfrac{1}{3} + 0 + \dfrac{1}{6} + \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{6}$

Propriété 2 – Loi des grands nombres

Après un très grand nombre de réalisations de l'expérience aléatoire associée à X, la valeur moyenne prise par la variable aléatoire X se rapproche de l'espérance de X.

Exemple : En jouant un grand nombre de fois, on s'attend à gagner en moyenne $\dfrac{1}{6} \approx 0,16$ € par partie.

Au programme :

- Variable aléatoire discrète : loi de probabilité, espérance.
- Interpréter en situation les écritures $\{X = a\}, \{X \leqslant a\}$ où X désigne une variable aléatoire et calculer les probabilités correspondantes $\mathbb{P}(X = a), \mathbb{P}(X \leqslant a)$.
- Calculer et interpréter en contexte l'espérance d'une variable aléatoire discrète.

III. Loi de Bernoulli et simulation

1) Loi de Bernoulli

Définition 7 – Épreuve de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire comportant exactement **deux issues** :

- une issue appelée **succès** (de valeur 1).
- et l'autre appelée **échec** (de valeur 0).

Le paramètre de cette épreuve, noté p, correspond à la probabilité de succès.

✎ **Exemple :**
On répond au hasard à une question Kahoot! où quatre réponses sont proposées et dont une seule est juste.
Si on appelle succès l'évènement « La réponse choisie est juste » de probabilité $\frac{1}{4}$, alors l'expérience définit une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{4} = 0,25$.

Propriété 3 – Loi de probabilité d'une épreuve de Bernoulli

Soit X une variable aléatoire associée à une épreuve de Bernoulli de paramètre p. Alors la loi de probabilité de X est :

x_i	0	1
$\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$	$1-p$	p

◅ **Remarque :** Il est fréquent de noter $q = 1 - p$ la probabilité d'échec.

✎ **Exemple :**
En reprenant le réponse au Kahoot!, la loi de probabilité est :

x_i	0	1
$\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Propriété 4 – Espérance d'une épreuve de Bernoulli

L'espérance d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p est aussi p :

$$\mathbb{E}(X) = 1 \times p + 0 \times (1-p) = p$$

✎ **Exemple :**
En répondant au hasard aux Kahoot!, au bout d'un très grand nombre de questions, on aura en moyenne répondu juste à 1 question sur 4.
$\mathbb{E}(X) = p = \frac{1}{4}$.

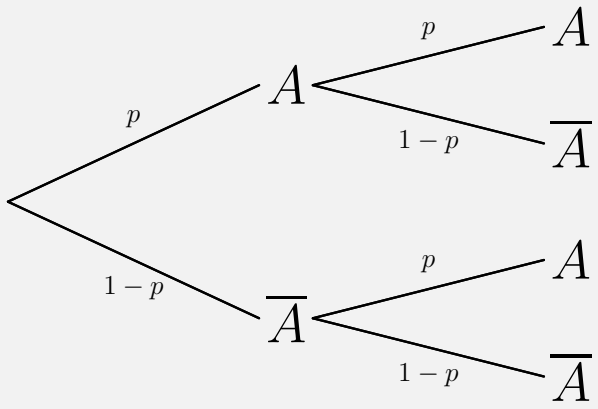
2) Schéma de Bernoulli

Définition 8 – Schéma de Bernoulli

Un **schéma de Bernoulli** est la **répétition** d'épreuves de **Bernoulli identiques** et **indépendantes**.

Les paramètres d'un schéma de Bernoulli sont :

- le nombre n de répétitions de l'épreuve de Bernoulli ;
- la probabilité de succès p de cette épreuve.



✎ **Exemple :**

Une urne contient 5 boules rouges et 15 boules noires.

- On prend une boule dans l'urne en souhaitant tirer une boule rouge.
- On la remet puis tire une nouvelle boule.
- On répète le processus jusqu'à avoir tiré 40 boules.

Ainsi, on répète 40 fois de manière identique et indépendante l'expérience ayant deux issues :

- le succès : « On obtient une boule rouge » de probabilité $p = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 0,25$
- l'échec : « On obtient une boule noire » de probabilité $1 - p = 0,75$

L'expérience définit donc un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 40$ et $p = 0,25$

3) Simulation et échantillonnage

Définition 9 – Échantillon

Lorsque l'on réalise plusieurs fois une même expérience aléatoire de manière indépendante (c'est-à-dire que les différentes réalisations n'ont pas d'influence les unes sur les autres), l'ensemble des résultats obtenus est appelé **échantillon**.
Le nombre de fois où l'expérience est réalisée est appelée **taille** de l'échantillon.

✎ **Exemple :**

- Si l'on lance 10 fois un dé équilibré à 6 faces et qu'on observe le résultat obtenu, on obtient un échantillon de taille 10.
- Si l'on tire au sort 1 000 personnes dans la population française et que l'on observe si la personne est droitière ou non, on obtient un échantillon de taille 1 000.

Méthode 2 – Simulation

On peut **simuler** informatiquement une expérience aléatoire à deux issues x_1 et x_2 de probabilité respectives p et $1-p$ en générant un nombre réel aléatoire entre 0 et 1 et en considérant que :

- x_1 est réalisée si ce nombre aléatoire est inférieur ou égal à p ;
- x_2 est réalisée sinon.

◅ **Remarque :**
Si les probabilités sont simples, on peut aussi générer des nombres entiers directement.

Définition 10 – Fluctuation d'échantillonnage

Deux échantillons (obtenus par l'expérience ou simulés) de même taille associés à une même expérience aléatoire ne sont, *a priori*, pas identiques : ce phénomène s'appelle la **fluctuation d'échantillonnage**

✎ **Exemple :**
Si l'on lance dix fois un dé à 6 faces puis que l'on recommence, les résultats des dix premiers lancers ne seront pas identiques aux dix suivants.

Source : *Cette sous-partie est presque entièrement tirée de Sésamath seconde*

Au programme :

- Loi de Bernoulli $(0;1)$ de paramètre p, espérance.
- Reconnaître une situation aléatoire modélisée par une loi de Bernoulli.
- Probabilité associée à la répétition d'épreuves aléatoires identiques et indépendantes de Bernoulli.
- Représenter par un arbre de probabilités la répétition de n épreuves aléatoires identiques et indépendantes de Bernoulli avec $n \leqslant 4$ afin de calculer les probabilités.
- Simuler N échantillons de taille n d'une loi de Bernoulli et représenter les fréquences observées des 1 par un histogramme ou un nuage de points.
- Interpréter sur des exemples la distance à p de la fréquence observée des 1 dans un échantillon de taille n d'une loi de Bernoulli de paramètre p.