Exposés suites – exercices

Algèbre

I. Suites rigolotes

1) Pliage d'un papier

1) Prob. DS p. (4.) – *Pliage d'un papier* – Cor ★

2) Les lapins de Fibonacci

2) Prob. 3 p. 77 (S.) – *Les lapins de Fibonacci* – Cor ★
3) Prob. 83 p. 169 (M.) – *Les lapins de Fibonacci* – Cor ★

II. Les fractales

1) How long is the coast of Britain?

2) Le flocon de Von Koch

4) Prob. 130 p. 70 (V.) – *Courbe de Von Koch* – Cor ★
5) Prob. 147 p. 75 (S.) – *Flocon de Von Koch* – Cor ★
6) Prob. 89 p. 40 (L.) – *Flocon de Von Koch* – Cor ★
7) Prob. DM p. (S.) – *Flocon de Von Koch* – Cor ★

3) Tapis de Sierpinsky

8) Prob. 91 p. 40 (L.) – *Tapis de Sierpinsky* – Cor ★
9) Prob. 134 p. 72 (V.) – *Tapis de Sierpinsky* – Cor ★
10) Prob. 121 p. 141 (M.) – *Tapis de Sierpinsky* – Cor ★
11) Prob. 1 p. (F.) – *Tapis de Sierpinsky* – Cor ★

4) L'éponge de Menger

12) Prob. p. 1 (D.) – *Éponge de Menger* – Cor ★
13) Prob. p. 2 (D.) – *Éponge de Menger* – Cor ★
14) Prob. p. 3 (D.) – *Éponge de Menge* – Cor ★

III. Les sommes

1) Château de cartes

15) Prob. 1 p. (I.) – *Château de cartes* – Cor ★

2) La légende de Sissa

16) Prob. 93 p. 41 (L.) – *La légende de Sissa* – Cor ★
17) Prob. 133 p. 72 (V.) – *La légende de Sissa* – Cor ★
18) Prob. E p. (3.) – *La légende de Sissa* – Cor ★
19) Prob. DM p. (2.) – *La légende de Sissa* – Cor ★

3) Le Paradoxe de Zénon

20) Prob. 141 p. 74 (S.) – *Le Paradoxe de Zénon* – Cor ★
21) Prob. p. 1 (T.) – *Le Paradoxe de Zénon* – Cor ★
22) Prob. p. 2 (T.) – *Le Paradoxe de Zénon* – Cor ★
23) Prob. p. 3 (T.) – *Le Paradoxe de Zénon* – Cor ★

III. Record de pliage de papier *(/ 3)*



On lit parfois qu'il est impossible de plier une feuille de papier plus de 7 fois en deux (vous essayerez après le DS).

Pourtant, le 27 janvier 2002,
Britney Gallivan a réussi à plier une feuille 12 fois.

Il s'agissait d'une feuille de $1\ 219\ m$ de long et de $0,2\ mm$ d'épaisseur.

1. Sachant qu'elle a toujours plié le papier dans le sens de la longueur, quelles étaient la longueur et la hauteur finales du papier plié ?
2. La distance Terre-Lune étant de $384\ 400\ km$, est-il vrai qu'en pliant sa feuille 41 fois, le papier plié toucherait la Lune ?

Source : Guinness World Records

3 Les lapins de Fibonacci



Nous allons étudier un problème posé par Leonardo Fibonacci dans son ouvrage *Liber Abaci*.
On s'intéresse à l'évolution d'une population de lapins, comptant initialement un couple de lapins.
À un mois, les lapins ne sont pas encore adultes et ne se reproduisent pas.
À partir de deux mois, les lapins sont adultes, et chaque couple de lapins donne naissance à un nouveau couple de lapins.
On suppose que les lapins ne meurent pas.
On note u_n le nombre de couples de lapins après n mois.
Ainsi u_1 correspond au nombre de couples de lapins initialement présent le premier mois. On a $u_1 = 1$.

A ▸ Évolution du nombre de couples de lapins

1. Combien y a-t-il de couple(s) de lapins le deuxième mois ? le troisième mois ?
2. Déterminer la valeur des cinq premiers termes de la suite (u_n).
3. Déterminer une relation entre u_n, u_{n+1} et u_{n+2}.
4. À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre de couples de lapins après 2 ans.
5. À l'aide de la calculatrice, déterminer après combien de mois la population de lapins dépasse 1 000 000 de lapins.

B ▸ Lien avec le nombre d'or

On note (v_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

1. Rechercher sur Internet la valeur exacte du nombre d'or et en donner une valeur approchée à 0,0001 près.
2. Calculer les cinq premiers termes de la suite (v_n).
3. a) Recopier le tableau suivant dans un tableur.

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0		
3	1		
4	2		
5	3		
6	4		

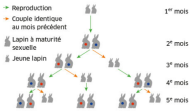
b) Rentrer la valeur de u_0 dans la cellule B2 et la valeur de u_1 dans la cellule B3.
c) Rentrer la formule nécessaire dans la cellule B4 et compléter la colonne B par recopie vers le bas.
d) Rentrer la formule nécessaire dans la cellule C2 et compléter la colonne C par recopie vers le bas.
e) Conjecturer la limite de la suite (v_n).

83 **Prolifération de lapins : la suite de Fibonacci**

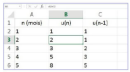
Partie A : Introduction

Dans son *Liber abaci*, datant de 1202, Léonardo Fibonacci décrit un problème exprimant la reproduction des lapins et menant à la suite dite de Fibonacci : « Combien de couples de lapins obtiendrions-nous à la fin de l'année si, commençant avec un couple, chacun des couples produisait chaque mois un nouveau couple lequel deviendrait productif au second mois de son existence ? »

Pour en savoir +



1. On note u_n le nombre de couples de lapins au cours du $n^{ième}$ mois et on suppose qu'aucun couple n'a disparu entre-temps. Pour compter le nombre de couples de lapins du 1er au 8e mois, on a utilisé un tableau.



	A	B	C
1	n (mois)	$u(n)$	$u(n-1)$
2	1	1	1
3	2	2	1
4	3	3	2
5	4	5	3
6	5	8	5

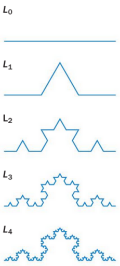
a. Expliquer la formule entrée dans la cellule B3.
b. Quelle formule est entrée en C3 ?
2. Justifier que $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ et préciser u_1 et u_2.

Partie B : Utilisation d'un algorithme

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = u_2 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
1. Écrire un algorithme en Python qui calcule le terme u_n, n étant choisi par l'utilisateur.
2. Écrire un autre algorithme qui permet de déterminer la plus petite valeur de n telle que u_n dépasse 100 000 000. Interpréter le résultat.

130 Courbe fractale de Von Koch (▸ ex. 6 p. 357)

On part d'un segment L_0 de longueur $\ell_0 = 1$ unité. On découpe L_0 en trois morceaux égaux et on remplace celui du milieu par deux segments constituant les deux côtés d'un triangle équilatéral dont on a effacé la base.



1. Calculer la longueur ℓ_1 de la ligne brisée L_1 ainsi obtenue et comportant quatre segments.

2. On répète ce procédé sur chacun des quatre segments de L_1 pour obtenir une ligne brisée L_2 de longueur ℓ_2.
Calculer ℓ_2.

3. a. Raisonner | On répète le procédé précédent. Pour tout nombre entier naturel n, déterminer la relation de récurrence liant la longueur ℓ_{n+1} de la ligne brisée L_{n+1} et la longueur ℓ_n de la ligne brisée L_n.

b. En déduire la nature de la suite (ℓ_n) et en déterminer le terme général.

c. Représenter | TICE À l'aide d'un tableau de valeurs de ℓ_n, à illustrer avec un nuage de points, conjecturer la limite de ℓ_n.

Info

La longueur de la ligne brisée tend vers l'infini, alors que le dessin fractal se maintient sur une surface finie.

147 Flocon de Von Koch

Le flocon de Von Koch est une figure qui se construit à partir d'un triangle équilatéral de côté 1 cm. À chaque étape :

- on divise chaque segment en trois segments de même longueur ;
- sur chaque côté, on construit un triangle équilatéral ayant pour base le segment du milieu et dont le troisième sommet se trouve à l'extérieur de la figure initiale.

On note p_n le périmètre du flocon à l'étape n et a_n l'aire du flocon à l'étape n.

Étape 0 **Étape 1**



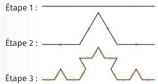
1. On considère un triangle équilatéral de côté c.
Exprimer, en fonction de c, le périmètre du triangle et l'aire du triangle.

2. Déterminer la valeur de p_0 et a_0.
3. En justifiant, déterminer, en fonction de n, le nombre de côtés du polygone qui correspond au flocon à l'étape n et la longueur de chaque côté.
4. En déduire l'expression de p_n en fonction de n.
5. Étudier les variations de la suite (p_n).
6. Conjecturer la limite de la suite (p_n).
7. On veut maintenant déterminer l'expression de a_n en fonction de n.
a) On note u_n le nombre de nouveaux triangles équilatéraux construits à l'étape n. Exprimer u_n en fonction de n.
b) On note v_n l'aire d'un nouveau triangle équilatéral construit à l'étape n.
Exprimer v_n en fonction de n.
c) On a alors $a_n = a_0 + u_1 \times v_1 + \ldots + u_n \times v_n$.
En déduire l'expression de a_n en fonction de n.
d) Conjecturer la limite de la suite (a_n).

89 [Représenter]

Afin de construire la courbe fractale ci-après, appelée flocon de Koch, on effectue à chaque étape le même programme de construction. On partage chaque segment en trois parties égales et on remplace le segment du milieu par un triangle équilatéral dont on efface la base.

Voici les 3 premières étapes de construction pour un côté.



On obtient alors la construction complète du flocon.



1. Nombre de côtés.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note c_n le nombre de côtés du flocon à l'étape n.

a. Déterminer les quatre premières valeurs de la suite (c_n).

b. Prouver que la suite (c_n) est géométrique.

c. Exprimer c_n en fonction de n.

2. Périmètre du flocon.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note ℓ_n la longueur d'un segment à l'étape n.

a. Prouver que la suite (ℓ_n) est géométrique.

b. Exprimer ℓ_n en fonction de n.

c. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note p_n le périmètre d'un flocon à l'étape n.

Prouver que $p_n = 3\ell_1 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$.

d. Si le côté du triangle initial est de 10 cm, le périmètre peut-il dépasser 1 km ? Si oui, à quelle étape ?

I. Le Flocon de Koch

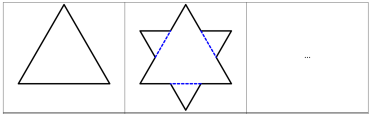
(18 points)

Énoncé :

Le flocon de Koch est une fractale (structure présentant des irrégularités à toutes les échelles) inventée en 1904 par le mathématicien Helge von Koch.

Pour le construire, on part d'un triangle équilatéral :

1. On divise chaque segment en trois segments de longueurs égales.
2. On construit (vers l'extérieur) des triangles équilatéraux ayant pour bases les segments médians de la première étape.
3. On supprime les segments qui étaient les bases des triangles de la deuxième étape.
4. On reprend à l'étape 1 avec tous les segments restants.



Le Flocon de Koch est la figure obtenue après une infinité d'itérations.

Source : *Wikipédia*

Questions :

1. En partant d'un triangle de 9 cm de côté, représentez le niveau 2 d'un flocon de Koch. *(3)*
2. En notant s_n le nombre de segments d'un flocon de niveau n, donnez les valeurs de s_0, s_1 et s_2. *(2)*
3. Donnez, la relation de récurrence liant s_{n+1} et s_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. *(2)*
4. En notant p_n le périmètre d'un flocon de niveau n, donnez les valeurs de p_0, p_1 et p_2. *(2)*
5. Donnez, la relation de récurrence liant p_{n+1} et p_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. *(2)*
6. Représentez graphiquement les 7 premiers termes de la suite (p_n). *(3)*
7. Comment semble évoluer le périmètre au fil des niveaux ? *(1)*

On rappelle que le centre du cercle circonscrit d'un triangle est l'intersection des médiatrices de ses côtés.

8. Sur votre figure, tracez le cercle circonscrit du triangle du niveau 0. *(1)*

On peut montrer que le flocon de Koch ne sortira par de ce cercle.

9. Donnez, par des mesures sur la figure, un encadrement des aires du flocon de Koch quelque soit le niveau. *(2)*

8) Problème 91 p. 40 (LivreScolaire) – *Tapis de Sierpinsky* – Co – ★

91 [Calculer.]

Tapis de Sierpiński

On considère un carré dont l'aire est de 1 m².
Pour construire la figure ci-dessous, on partage ce carré en 9 carrés égaux et on noircit celui du centre.
On partage chacun des 8 carrés restants en 9 carrés égaux et on noircit les 8 carreaux au centre.
On recommence cette construction à chaque étape.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, A_n désigne l'aire totale noircie lors de l'étape n.
On a donc $A_1 = \frac{1}{9}$.



Étape 0 Étape 1 Étape 2 Étape 3

1. a. En remarquant qu'à chaque étape, on noircit $\frac{1}{9}$ de la surface verte, justifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $A_{n+1} = \frac{8}{9}A_n + \frac{1}{9}$.
b. À l'aide de la calculatrice ou d'un programme, donner les valeurs A_5, A_{10}, A_{25} et A_{50}.
c. Conjecturer le sens de variation et la limite de (A_n).
2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $B_n = A_n - 1$.
a. Prouver que la suite (B_n) est géométrique.
b. Exprimer B_n en fonction de n.
c. En déduire l'expression de A_n en fonction de n.
d. Prouver la conjecture faite à la question **1.**.
3. Peut-on avoir plus de 80 %, 95 %, 99 % du carré noirci ? Si oui, préciser les étapes correspondantes à chaque fois.

134 Triangle de Sierpinski

- On dispose d'un triangle équilatéral bleu.
- On prend les milieux des côtés pour former un triangle que l'on supprime.
- On recommence le même processus à chacun des triangles bleus restants.



Fin du 1er processus | **Fin du 2e processus** | **Fin du 3e processus**

a. Combien de triangles ont été supprimés à la fin du 20e processus ?

b. Quelle est la part d'aire bleue restante à la fin du 20e processus ?

Info

Waclaw Sierpinski (1882-1969) est un mathématicien polonais, déporté pendant la Seconde Guerre mondiale, dont les travaux ont principalement porté sur la théorie des ensembles.

121 **Triangles de Sierpinski**

À l'étape 0, on construit un triangle équilatéral de côté a.
À l'étape 1, on construit le « triangle du milieu » en joignant les milieux des côtés du triangle et on le colorie.
À l'étape 2, dans chacun des triangles non coloriés obtenus à l'étape 1, on construit « le triangle du milieu », que l'on colorie.



Triangle initial — Étape 1 — Étape 2

On réitère le procédé en coloriant à chaque étape les « triangles du milieu » obtenus.
On note u_n le nombre de triangles non coloriés, v_n le nombre de triangles coloriés et A_n l'aire d'un triangle non colorié à l'étape n.

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

n	u_n	A_n	v_n
0			
1			
2			
3			

2. a. On note (u_n) la suite des nombres de triangles non coloriés. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
b. En déduire la nature de la suite (u_n). Exprimer u_n en fonction de n.
c. Déterminer A_n en fonction de n. Quelle semble être la limite de (A_n) quand n tend vers l'infini ?
3. On note (v_n) la suite du nombre de triangles coloriés. v_n est égal au nombre de triangles coloriés à l'étape n ; combien y a-t-il de nouveaux triangles coloriés à l'étape $n+1$? En déduire v_n en fonction de n.

HISTOIRE DES MATHS

Les triangles de Sierpinski ont été définis par le mathématicien polonais Wacław Sierpiński (1882-1969). Ces triangles sont des fractales ; quelle que soit l'échelle à laquelle on observe la figure, on peut la retrouver en entier. Les fractales se retrouvent partout dans la nature (chou romanesco, fougère, flocons de neige…). Elles ont de nombreuses applications dans des domaines tels que la biologie, l'astrophysique, l'étude des phénomènes naturels, l'industrie, les finances ou l'art.

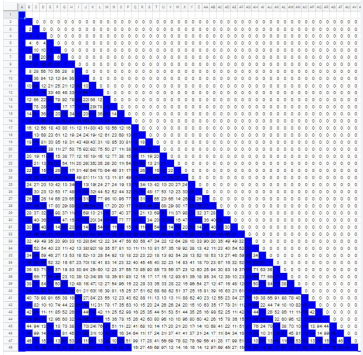
17 de noviembre de 2022

Triangle de Sierpinsky inattendu

Une petite manip sur tableur simple et impressionnante à faire avec des lycéens : la répartition des nombres impairs dans le triangle de Pascal fait apparaitre un triangle de Sierpinsky !

Il n'y a que 2 formules à saisir : une somme pour créer le triangle de Pascal et la formule "=MOD(A1;2)=1" pour la mise en forme conditionnelle.

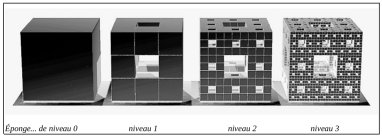
(je précise que j'ai réduit la largeur des cellules pour qu'elles soient carrées et que donc tous les nombres à plus de 2 chiffres sont tronqués - à partir de la ligne 10 ou 11).



Tú y 72 personas más 13 comentarios

Autour de l'éponge de Menger

I. Présentation



Éponge... de niveau 0 *niveau 1* *niveau 2* *niveau 3*

Définition 1 - L'éponge de Menger

La construction d'une éponge de Menger peut être décrite de la manière suivante :

1/ débuter par un cube ;

2/ réduire le cube au tiers et en faire 20 copies ;

3/ placer ces copies de telle façon qu'elles forment un nouveau cube de la même taille que l'original, sans les parties centrales ;

4/ répéter le processus à partir de l'étape 2 pour chacun des 20 cubes ainsi créés.

Le solide qui serait obtenu après un nombre infini d'itérations, est l'éponge de Menger.

Source : Wikipedia

On se propose de réaliser avec la classe une éponge de Menger de niveau 2.

II. Éponge de Menger niveau 0 – le cube de base ($\approx 15\ min$)

Nous allons partir d'un cube de base de côté $9\ cm$.



1. Quel est le volume de ce cube ?

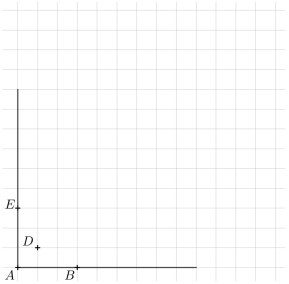
2. Si l'on divise les longueurs des côtés de ce cube par trois, par combien divise-t-on le volume du cube ?

3. Quelle est l'aire de la surface de l'éponge de niveau 0 en contact avec l'extérieur ?

III. Éponge de Menger de niveau 1 – un trou par face ($\approx 30\ min$)

Une fois ce cube réduit on en fait 20 copies que l'on vient coller comme sur la première illustration.

1. Compléter la représentation ci-contre pour obtenir une perspective cavalière d'une éponge de Menger de niveau 1.



Remarque :

- On ne représentera que les arêtes visibles que vous pourrez repasser au feutre.
- Vous pourrez aussi colorier la figure et effacer les traits de construction pour y voir plus clair.

2. Dans le repère $(A; B, D, E)$ placer les points :

$I(1; 0; 1)$	$J(3; 2; 3)$	$K(0; 1; 3)$	$M(3; 2; 1)$

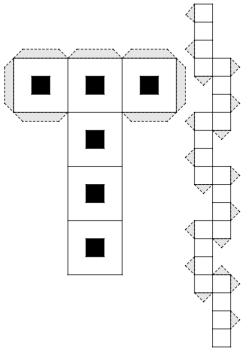
On rappelle que maintenant $AB = 3\ cm$.

3. Quel est le volume total de cette éponge de Menger ?

4. Montrer que l'aire de sa surface en contact avec l'extérieur est de $648\ cm^2$

IV. Éponge de Menger de niveau 2 ($\approx 20\ min$)

Ci-dessous se trouve deux patrons permettant de réaliser l'extérieur et l'intérieur de l'éponge de Menger de niveau 1 après réduction.



1. Selon ta motivation assemble ces deux patrons ou seulement celui de gauche.

On assemblera ce solide avec ceux de tes camarades en classe pour obtenir une éponge de Menger de niveau 2.

2. Quel sera le volume total de cette éponge de Menger de niveau 2 ?

3. Comment semble évoluer le volume d'une éponge de Menger au fil de sa construction ?

4. Ton professeur a calculé que la surface extérieure de cette éponge est d'environ $1\ 056\ cm^2$.
Comment semble évoluer l'aire de la surface d'une éponge de Menger au fil de sa construction.

Un château de cartes est un empilage organisé de la façon suivante:

Château à 1 étage Château à 2 étages Château à 3 étages etc…



Combien faut-il de cartes pour construire 5 étages, 12 étages, 100 étages et, de manière générale, n étages ?

Vous raconterez sur votre feuille les différentes étapes de votre recherche (vous pouvez minuter le temps, joindre vos brouillons…), les observations que vous avez pu faire et qui vous ont fait progresser ou changer de méthode (chercher seul).
L'évaluation portera principalement sur la qualité de la recherche.

93 ÉNIGME

Dans l'antiquité, le roi des Indes demanda un nouveau jeu pour se distraire.
Son vizir Sissa inventa le jeu d'échecs.



Le roi, ravi de ce nouvel amusement lui demanda comment le récompenser.
Sissa dit : « Je voudrais un peu de riz. Placez un grain de riz sur la première case, deux sur la deuxième, quatre sur la troisième et ainsi de suite en doublant à chaque fois le nombre de grains de riz. »
Le roi accepta cette demande, qu'il trouva bien modeste.
Le conseiller s'écria : « Sire ! Vous conduisez notre pays à la ruine ! »
Pourquoi le conseiller du roi réagit ainsi ?

133 L'échiquier de Sissa

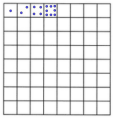
Un échiquier est constitué de 8 × 8 = 64 cases.
La légende raconte que, pour être remercié de son invention, le créateur du jeu, Sissa, lorsqu'on lui demanda ce qu'il voulait, répondit : un grain de riz sur la première case, deux sur la deuxième, quatre sur la troisième, et ainsi de suite pour remplir l'échiquier, en doublant la quantité de grains à chaque case.
On suppose qu'un grain de riz pèse 0,02 g et qu'un camion poids lourd de 40 t mesure 15 m de long.

• Si on remplit de tels camions avec le nombre de grains de riz obtenus par Sissa et qu'on met ces camions bout à bout, combien de fois cela représentera-t-il la circonférence de la Terre ?



Exercice 1 (5 points)

Une ancienne légende raconte que le jeu d'échecs a été inventé par un vieux sage. Son roi voulut le remercier en lui accordant n'importe quel cadeau en récompense. Le vieux sage demanda qu'on lui fournisse un peu de riz pour ses vieux jours, et plus précisément qu'on place :
un grain de riz sur la première case du jeu qu'il venait d'inventer, puis deux grains de riz sur la case suivante, puis quatre grains de riz sur la troisième case, et ainsi de suite, en doublant le nombre de grain de riz entre une case et la suivante, et ce jusqu'à la 64^e case (puisqu'un plateau de jeu d'échecs comporte 64 cases).



On note u_1 le nombre de grains de riz présents sur la première case, u_2 le nombre de grains sur la deuxième case, et ainsi de suite jusqu'à la 64^e case.

1. Déterminer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.
2. Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, u_{n+1} en fonction de u_n.
3. En déduire la nature de la suite (u_n) et en préciser les éléments caractéristiques.
   Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, u_n en fonction de n.
4. Calculer le nombre de grains de riz qui doivent être disposés sur le plateau pour satisfaire à la demande du vieux sage.
5. On veut écrire une fonction en langage Python qui détermine à partir de quelle case, le vieux sage disposera d'au moins R grains de riz. Une ébauche de cette fonction est donnée ci-contre.

   Recopier et compléter cette fonction afin qu'elle renvoie le résultat désiré.

```
def nb_case(R):
    case = 1
    u = 1
    somme = u
    while somme .....:
        u = ...
        somme = ...
        case = case + 1
    return case
```

II. L'échiquier et les grains de blé

☺☺☹ *(7 points)*

Énoncé :
Scheran, monarque indien, promit à Sissa l'inventeur du jeu d'échec, de lui donner tout ce qu'il voudrait en guise de récompense.
Sissa répondit :
« Que votre Majesté daigne me donner un grain de blé pour la première case de l'échiquier, deux pour la seconde, quatre pour la troisième, et ainsi de suite, en doublant jusqu'à la soixante-quatrième case. ».



Questions :

1. Pensez-vous, comme le monarque, que cette demande est ridiculement modeste ? (on attend un préjugé brut sans revenir sur cette réponse plus tard). *(0,5)*

   (1,5)

   a. Combien de grains de blé seront-ils donnés pour la 2^e case ?
   b. Pour la 3^e case ? Pour la 5^e ? Pour la 10^e ? Pour la 20^e ? Pour la 64^e ?

   a. Vérifiez les égalités suivantes : *(1,5)*
   - $2^0+2^1=2^2-1$
   - $2^0+2^1+2^2=2^3-1$
   - $2^0+2^1+2^2+2^3=2^4-1$

   b. En utilisant la dernière égalité, démontrez que $2^0+2^1+2^2+2^3+2^4=2^5-1$ *(0,5)*

   c. En utilisant le même procédé, nous avons pu montrer que $2^0+2^1+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$, démontrez alors que $2^0+2^1+\cdots+2^n=2^{n+1}-1$. *(0,5)*

   d. Déduisez-en une valeur approchée du nombre total de grains réclamés par Sissa. *(1)*

Arthur désire savoir à quoi correspond concrètement cette quantité. Il se procure donc des grains de blé, en compte 1 000 et les pèse. Il en déduit qu'en moyenne, un grain pèse 50 mg.

3. Estimez en grammes, en kilogrammes et en tonnes, la masse totale des grains réclamés par Sissa. *(1)*

Selon la FAO (Organisation des Nations Unies pour l'alimentation et l'agriculture), la France a produit en 2004 près de 40 millions de tonnes de blé.

4. Combien d'années équivalentes à 2004 seraient nécessaires pour que les producteurs français puissent honorer la promesse du monarque ? *(0,5)*

Source : *Sésamath*

141 Ricochets

Sofia se place près d'un lac et décide de s'entraîner à faire des ricochets.
Elle lance un caillou qui parcourt 2 m avant de rebondir une première fois. Le caillou parcourt ensuite la moitié, donc 1 m, avant de rebondir une deuxième fois. Puis il parcourt la moitié, donc 0,5 m, avant de rebondir une troisième fois. Le caillou continue indéfiniment comme cela.

1. Quelle est la distance totale parcourue par le caillou au moment du 20^{e} rebond ?

2. Quelle est la distance totale parcourue par le caillou au moment du n-ième rebond ?

3. Pour un très grand nombre de rebonds, vers quelle valeur se rapproche la distance totale parcourue par le caillou ?

I. Le paradoxe de Zénon – version caillou –

« Zénon se tient à huit mètres d'un arbre, tenant une pierre. Il lance sa pierre dans la direction de l'arbre. Avant que le caillou puisse atteindre l'arbre, il doit traverser la première moitié des huit mètres. Il faut un certain temps, non nul, à cette pierre pour se déplacer sur cette distance. Ensuite, il lui reste encore quatre mètres à parcourir, dont elle accomplit d'abord la moitié, deux mètres, ce qui lui prend un certain temps. Puis la pierre avance d'un mètre de plus, progresse après d'un demi-mètre et encore d'un quart, et ainsi de suite *ad infinitum* et à chaque fois avec un temps non nul. Zénon en conclut que la pierre ne pourra pas frapper l'arbre, puisqu'il faudrait pour cela que soit franchie effectivement une série infinie d'étapes, ce qui est impossible.
Le paradoxe se résout en soutenant que le mouvement est continu; le fait qu'il soit divisible à l'infini ne le rend pas impossible pour autant. De plus, en analyse moderne, le paradoxe est résolu en utilisant fondamentalement le fait qu'une somme infinie de nombres strictement positifs peut converger vers un résultat fini. »

Source : *Wikipedia*

En effet, il est possible de montrer qu'en additionnant ainsi toutes les subdivisions parcourues, après une infinité d'étapes, la suite d_n (de la distance totale parcourue) converge bien vers huit mètres.

$$\lim_{n \to +\infty} d_n = 8$$

Nous allons nous intéresser ici à la visualisation de cette limite.

II. Version tableur

1. La distance à ajouter au trajet étant la moitié de la distance restante, en notant a_n la distance à ajouter à l'étape n, on a $a_1 = 4$. Donnez les valeurs de a_2 et a_3.
2. En notant d_n la distance total parcourue à l'étape n, donnez les valeurs de d_1, d_2 et d_3.
3. Justifiez que $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$ avec $a_1 = 4$.
4. Dans un tableur, créez deux colonnes (n et a_n) et avec grâce à une récurrence calculez les 20 premiers termes de la suite (a_n).
5. Vérifiez la cohérence de vos résultats avec ceux de la question 1.
6. Créez une nouvelle colonne pour les termes de la suite (d_n) calculés à partir de la colonne a_n.
7. Appelez-moi pour vérifier. En attendant, proposez dans une nouvelle colonne un calcul direct de (d_n) sans passer par (a_n).
8. Représentez graphiquement la suite d_n. Que constate-t-on?
9. À partir de combien d'étapes la distance restant à parcourir par le caillou est-elle inférieure à 1 mm?
10. Appelez-moi pour validez cette première partie du TP.

III. Version python

1) Algorithme de seuil

1. Complétez dans un éditeur Python la fonction `def d(n):` renvoyant la valeur du terme de rang n de la suite (d_n).

```
def d(n):
    distance=0
    ajout=4
    for k in range(1,n+1):
        distance = ...
        ajout = ...
    return distance
```

2. Testez votre fonction avec diverses valeurs que vous compararez avec les résultats de la version tableur. Appelez-moi pour valider.
3. Complétez maintenant la fonction `seuil(ecart):` renvoyant le nombre d'étapes nécessaires pour se rapprocher de moins de $ecart$ du mur.

```
def seuil(ecart):
    distance=0
    ajout=4
    etape=0
    while distance ...:
        distance = ...
        ajout = ...
        etape = etape +1
    return etape
```

4. Testez votre fonction avec 0,001 et comparez votre résultat avec celui obtenu au tableur.

5. Testez maintenant fonction avec la longueur de Planck ($1,61625518\times10^{-35}$, écrivez `1.61625518*10**(-35)`), notez votre résultat et appelez-moi pour vérifier.

2) Visualisation

Nous allons maintenant utiliser un nouvel objet : **les listes**.

- Une liste est une structure de données **indicées** qui contient une série de valeurs.
- On accède à l'élément n de la liste u en saisissant `u[n]`.
- Une liste se déclare par une série de valeurs séparées par des **virgules**, le tout encadré par des **crochets**.

1. Directement dans la console Python, définissez les trois listes suivantes, en copiant le code ci-dessous :

```
>>> animaux = ["girafe", "tigre", "singe", "souris"]
>>> tailles = [5, 2.6, 1.75, 0.15]
>>> mixte = ["girafe", 5, "souris", 0.15]
```

2. Vérifiez que les commandes suivantes affichent les listes précédemment définies.

```
>>> animaux
>>> tailles
>>> mixte
```

3. Que doit-on saisir pour que obtenir `"singe"` ? Vérifiez. . . . . .

***Source** : Inspiré de l'université de Paris Diderot*

Il existe de plus deux manière de créer une liste vide nommée L :

- `L = []`
- `L = list()`

Et il est possible d'ajouter l'élément *elem* directement à la fin de la liste L en saisissant :

- `L.append(elem)`

Enfin, il est possible de connaître le nombre d'éléments de la liste L en saisissant :

- `len(L)`

4. Rajouter le dodo et le bonobo aux animaux puis vérifiez que la liste contient 6 éléments. Appelez-moi.

3) Visualiser l'avancée du caillou

1. Dans l'éditeur, complétez `def parcours(N):` qui devra renvoyer une liste contenant les N premiers termes de la suite $d(n)$. On ne cherchera pas forcément à optimiser le code.

```
1 def parcours(N):
2     L=[]
3     for n in range(0,N+1):
4         L.append(d(n))
5     return L
```

2. Demandez la liste des 20 premiers termes et vérifiez la cohérence avec les résultats précédents.

4) Visualisation graphique – pour aller plus loin

1. Il est possible de visualiser la liste L. Pour cela, insérez le code `import matplotlib.pyplot as plt` avant vos fonctions et remplacez `return L` par `plt.plot(L)` et `plt.show()`.