Trigonométrie – exercices

Algèbre

I. Cercle trigonométrique

1) Act. 1 p. 198 (S.) – *Découvrir le cercle trigonométrique* – Ch Ra Re ★★
2) Act. 3 p. 191 (V.) – *Bobine de fil* – Co ★
3) App. 24 p. 193 (L.) – *Radians en degrés* – Ra ★
4) App. 25 p. 193 (L.) – *Degrés en radians* – Ra ★
5) App. 1 p. 205 (S.) – *Placer des points* – Ra Re ★
6) App. 21 p. 208 (S.) – *Placer des points* – Ra Re ★
7) App. 22 p. 208 (S.) – *Placer des points* – Ra Re ★
8) App. 21 p. 208 (S.) – *Lire des points* – Ra Re ★
9) App. 21 p. 208 (S.) – *Lire des points* – Ra Re ★
10) App. 25 p. 208 (S.) – *Stationnement interdit* – Ra Re ★
11) App. 26 p. 208 (S.) – *Plusieurs tours* – Ra Re ★
12) App. 27 p. 208 (S.) – *Plusieurs tours* – Ra Re ★
13) Ex. 50 p. 195 (L.) – *Pentagone* – Ra Re ★★

II. Cosinus et sinus d'un angle orienté

14) Act. C p. 183 (L.) – *Une histoire de coordonnées* – Ch Re Ma ★★
15) Ex. 47 p. 210 (S.) – *Points associés* – Ra Re ★
16) App. 3 p. 205 (S.) – *Angles associés* – Ra Re ★
17) App. 4 p. 205 (S.) – *Angles associés* – Ra Re ★
18) App. 28 p. 208 (S.) – *Angles associés* – Ra Re ★
19) App. 29 p. 208 (S.) – *Angles associés* – Ra Re ★
20) App. 30 p. 208 (S.) – *Angles associés* – Ra Re ★
21) App. 31 p. 208 (S.) – *Points associés* – Ra Re ★★
22) Ex. 62 p. 197 (L.) – *Calculs* – Ca Ra ★★
23) Ex. 63 p. 197 (L.) – *Calculs* – Ca Ra ★★

III. Équations trigonométriques

24) App. 5 p. 206 (S.) – *Équation trigonométrique* – Ra Re ★
25) App. 6 p. 206 (S.) – *Inéquation trigonométrique* – Ra Re ★★
26) App. 7 p. 206 (S.) – *Équation trigonométrique* – Ra Re ★
27) App. 8 p. 206 (S.) – *Inéquation trigonométrique* – Ra Re ★★
28) Ex. 9 p. 206 (S.) – *Système d'inéquations* – Ra Re ★★
29) Ex. 10 p. 206 (S.) – *Système d'inéquations* – Ra Re ★★
30) Ex. 11 p. 206 (S.) – *Système d'inéquations* – Ra Re ★★
31) Ex. 12 p. 206 (S.) – *Système d'inéquations* – Ra Re ★★
32) Ex. 34 p. 193 (L.) – *Équation avec trigo* – Ca Ra Re ★★
33) Ex. 61 p. 211 (S.) – *Inéquations avec trigo* – Ca Ra Re ★★
34) Ex. 63 p. 211 (S.) – *Équations avec trigo* – Ca Ra ★★★

IV. Fonctions trigonométriques

35) Act. A p. 204 (L.) – *Découverte des fonctions* – Ra Re Ma ★★
36) Ex. 37 p. 209 (S.) – *Inéquations graphiques* – Ra Re ★★
37) Ex. 38 p. 209 (S.) – *Inéquations graphiques* – Ra Re ★★
38) App. 77 p. 206 (V.) – *Lecture de parités* – Ra Re ★
39) App. 78 p. 206 (V.) – *Lecture de parités* – Ra Re ★
40) Ex. 42 p. 209 (S.) – *Parités* – Ca Ra Re ★★
41) App. 40 p. 216 (L.) – *Compléter une fonction* – Ra Re ★★
42) App. 41 p. 216 (L.) – *Compléter une fonction* – Ra Re ★★
43) App. 42 p. 217 (L.) – *Compléter une fonction* – Ra Re ★★
44) Ex. 68 p. 212 (S.) – *Tangente* – Ca Ra Re ★★★

V. Bilan et problèmes

45) Prob. 50 p. 210 (S.) – *Codage* – Ra Re ★★
46) Prob. 51 p. 210 (S.) – *Codage* – Ra Re ★★★
47) Prob. 73 p. 205 (V.) – *VTT* – Ca Ch Ra Ma ★★
48) Prob. 75 p. 213 (S.) – *Inéquations et architecture* – Ra Re Ma ★★
49) Prob. 75 p. 220 (L.) – *Ressort* – Ra Ma ★★★
50) Prob. 99 p. 210 (V.) – *Tapis roulant* – Ch Ra Ma ★★★
51) Prob. 105 p. 212 (V.) – *Un pendule simple* – Ca Re Ma ★★

1 Découvrir le cercle trigonométrique



Un professeur d'éducation physique et sportive explique à ses élèves les objectifs de l'entraînement qu'il a prévu : courir le plus rapidement possible et s'arrêter immédiatement dès que retentit le coup de sifflet.

1. Dans cette partie, on suppose que la piste de course est un cercle ayant pour périmètre 1 000 mètres. Voici les distances parcourues relevées par le professeur.

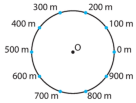
Élève	Aurélie	Benjamin	Capucine	Dorian	Éléonore	Fatima
Distance parcourue (en m)	700	500	1 200	1 700	1 350	1 600
Élève	Grégoire	Hamid	Iris	Julie	Katell	Lili
Distance parcourue (en m)	350	1 700	800	1 000	1 800	2 000

a) Recopier et compléter le schéma ci-contre en indiquant la place de chaque élève par son initiale.

b) Quels élèves se retrouvent à la même position sur la piste de course ? Pourquoi ?

c) Même question en supposant que la piste de course est un cercle ayant pour périmètre 200 m.

d) Donner un exemple de périmètre de piste pour lequel tous les participants se retrouveraient à la même position.



2. On suppose à présent que le cercle modélisant la piste de course a pour rayon 1 km et que le professeur a en charge une autre classe.
Pour toute cette question, on donnera les résultats arrondis à 0,1 km.

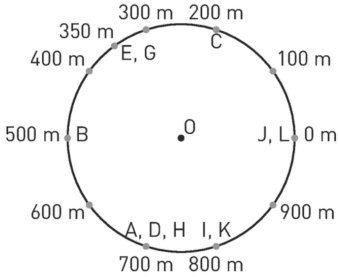
a) Déterminer la valeur exacte de la longueur de la piste.

b) Sachant qu'avant le coup de sifflet du professeur, aucun élève n'a fait plus d'un tour, préciser la distance parcourue par Cassandre, qui a couru 1 quart de piste, puis celle parcourue par Terry, qui a parcouru $\frac{2}{3}$ de piste.

c) De nouveaux relevés sont donnés dans le tableau ci-contre.
Tracer un cercle et y placer les élèves.

Élève	Nathan	Kenza	Célia	William
Distance parcourue (en km)	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{9\pi}{2}$

✔ **1. a)**



b) Éléonore et Grégoire se retrouvent au même endroit car Eléonore a fait exactement 1 tour de plus que Grégoire.

Aurélie, Dorian et Hamid se retrouvent au même endroit car Dorian et Hamid ont fait exactement 1 tour de plus qu'Aurélie.

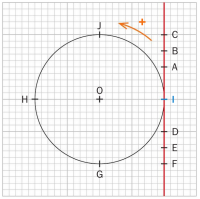
Avec une bobine et du fil



On veut enrouler un fil autour d'une bobine de rayon 1 cm.

Pour cela, on fixe le fil au point I de la bobine représentée en coupe ci-dessous à l'échelle 2:1.

1. Reproduire cette figure à la même échelle.



2. a. Si l'on enroule le fil (représenté par la droite (IA)) autour de la bobine dans le sens indiqué par la flèche, les points A, B et C du fil viennent se placer sur la bobine respectivement en A', B' et C'.
Placer approximativement ces trois points sur la bobine.

b. Si l'on enroule le fil autour de la bobine dans le sens inverse de celui indiqué par la flèche, les points D, E et F du fil viennent se placer sur la bobine respectivement en D', E' et F'.
Placer approximativement ces trois points sur la bobine.

3. En déroulant le fil enroulé autour de la bobine, les points J, H et G de la bobine correspondent respectivement aux points J_1, H_1 et G_1 sur le fil déroulé, représenté par la droite (IA). Placer approximativement ces trois points sur (IA).
Y a-t-il plusieurs possibilités ? Si oui, les préciser.

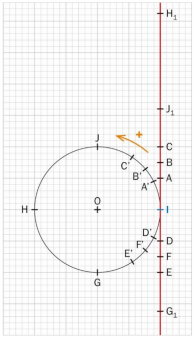
4. a. En quel point de la bobine viendrait se placer, par enroulement dans le sens indiqué par la flèche, le point M du fil si la longueur IM est égale à $\frac{11\pi}{2}$?

Aide Comparer $\frac{11\pi}{2}$ avec le périmètre ou demi-périmètre de la bobine.

b. En quel point de la bobine viendrait se placer, par enroulement dans le sens inverse de celui indiqué par la flèche, le point N du fil si la longueur IN est égale à $\frac{7\pi}{2}$?

✔ **3** Avec une bobine et du fil

1. ; 2.a. ; 2.b. et 3.



Il y a une infinité de possibilités pour les points J_1, H_1 et G_1 sur le fil déroulé, car on peut enrouler le fil autant de fois que l'on veut autour de la bobine.

4. a. Le point M viendrait se placer sur le point G, car $\frac{11\pi}{2} = \frac{12\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 3 \times 2\pi - \frac{\pi}{2}$.

b. Le point N viendrait se placer sur le point J, car $\frac{7\pi}{2} = \frac{8\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 2 \times 2\pi - \frac{\pi}{2}$.

24 Convertir les mesures suivantes en degré. Donner les valeurs exactes.

1. $\frac{\pi}{16}$ rad
2. $\frac{\pi}{72}$ rad
3. $\frac{\pi}{7}$ rad

✔ Corrigé exercice 24 :

On utilise le fait que les radians et les degrés sont proportionnels et le fait que π rad soit égal à 180° :

1. $\frac{\pi}{16}\text{rad} = \frac{180^\circ}{16} = 11,25^\circ$
2. $\frac{\pi}{72}\text{rad} = \frac{180^\circ}{72} = 2,5^\circ$
3. $\frac{\pi}{16}\text{rad} = \frac{180^\circ}{7} \approx 25,7^\circ$

25 Convertir les mesures suivantes en radian. Donner les valeurs exactes.

1. 75° **2.** 120° **3.** 405°

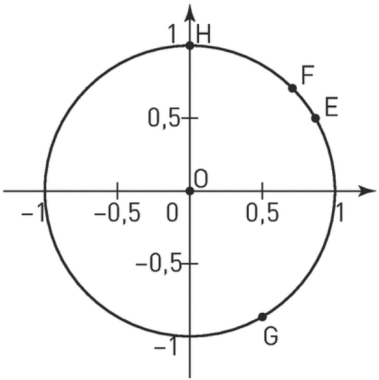
✔ Corrigé exercice 25 :

On utilise la formule suivante : $radian = \dfrac{degre \times \pi}{180}$

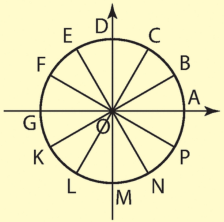
1. $\dfrac{75 \times \pi}{180} = \dfrac{5\pi}{12}$ rad
2. $\dfrac{120 \times \pi}{180} = \dfrac{2\pi}{3}$ rad
3. $\dfrac{405 \times \pi}{180} = \dfrac{9\pi}{4}$ rad

1 Placer sur un cercle trigonométrique les points E, F, G et H associés respectivement aux réels $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$.

✔ **1.**



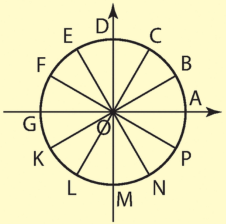
Pour les exercices 21 et 22, on considère le cercle trigonométrique ci-dessous.



21 Associer chacun des nombres suivants à un point du cercle : $\frac{\pi}{6}$; $\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{2\pi}{3}$.

✔ **21.** $B_{\frac{\pi}{6}}$; $E_{\frac{2\pi}{3}}$; $P_{-\frac{\pi}{6}}$; $F_{\frac{5\pi}{6}}$; $L_{-\frac{2\pi}{3}}$

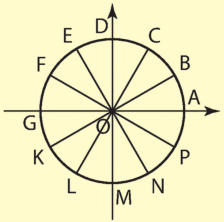
Pour les exercices 21 et 22, on considère le cercle trigonométrique ci-dessous.



22 Déterminer des réels associés aux points C, F et K dans l'intervalle $[0 ; 2\pi[$.

✔ **22.** Dans $[0 ; 2\pi[$: $C_{\frac{\pi}{3}}$; $F_{\frac{5\pi}{6}}$; $K_{-\frac{5\pi}{6}}$.

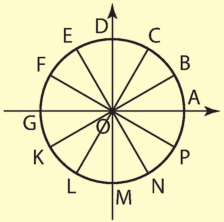
Pour les exercices 21 et 22, on considère le cercle trigonométrique ci-dessous.



21 Associer chacun des nombres suivants à un point du cercle : $\frac{\pi}{6}$; $\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{2\pi}{3}$.

✔ **21.** $B_{\frac{\pi}{6}}$; $E_{\frac{2\pi}{3}}$; $P_{-\frac{\pi}{6}}$; $F_{\frac{5\pi}{6}}$; $L_{-\frac{2\pi}{3}}$

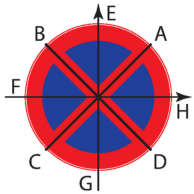
Pour les exercices 21 et 22, on considère le cercle trigonométrique ci-dessous.



21 Associer chacun des nombres suivants à un point du cercle : $\frac{\pi}{6}$; $\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{2\pi}{3}$.

✔ **21.** $B_{\frac{\pi}{6}}$; $E_{\frac{2\pi}{3}}$; $P_{-\frac{\pi}{6}}$; $F_{\frac{5\pi}{6}}$; $L_{-\frac{2\pi}{3}}$

25 On considère le panneau de stationnement interdit ci-contre.
Déterminer le réel associé aux points suivants dans l'intervalle $[0 ; 2\pi[$: D, E, F, G et H.



✔ **25.** $D_{\frac{7\pi}{4}}$; $E_{\frac{\pi}{2}}$; F_{π} ; $G_{\frac{3\pi}{2}}$; H_{0}

Pour les exercices 26 et 27, on considère un cercle trigonométrique de centre O dans un repère orthonormé (O ; I, J) et les points A(– 1 ; 0) et B(0 ; – 1).

26 **1.** Donner les points du cercle associés à chacun des réels suivants.

a) 0 **b)** π **c)** 4π **d)** 56π

2. Donner les points du cercle associés aux réels suivants.

a) 155π **b)** 70π **c)** $-1\,043\pi$ **d)** -588π

✔ **26. 1. a)** I_0 **b)** A_π **c)** $I_{4\pi}$ **d)** $I_{56\pi}$

2. a) $A_{155\pi}$ **b)** $I_{70\pi}$ **c)** $A_{-1\,043\pi}$ **d)** $I_{-588\pi}$

Pour les exercices 26 et 27, on considère un cercle trigonométrique de centre O dans un repère orthonormé (O ; I, J) et les points A(– 1 ; 0) et B(0 ; – 1).

27 **1.** Donner les points du cercle associés à chacun des réels suivants.

a) $\frac{\pi}{2}$ **b)** $\frac{5\pi}{2}$ **c)** $\frac{11\pi}{2}$ **d)** $-\frac{13\pi}{2}$

2. Donner les points du cercle associés aux réels suivants.

a) $\frac{67\pi}{2}$ **b)** $-\frac{37\pi}{2}$ **c)** $\frac{498\pi}{2}$ **d)** $-\frac{117\pi}{2}$

a) $\frac{\pi}{2}$ **b)** $\frac{5\pi}{2}$ **c)** $\frac{11\pi}{2}$ **d)** $-\frac{13\pi}{2}$

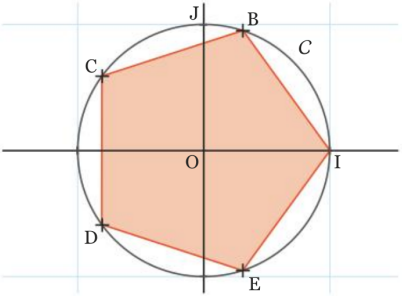
✔ **27. 1. a)** $J_{\frac{\pi}{2}}$ **b)** $J_{\frac{5\pi}{2}}$ **c)** $B_{\frac{11\pi}{2}}$ **d)** $B_{\frac{13\pi}{2}}$

2. a) $B_{\frac{67\pi}{2}}$ **b)** $B_{\frac{37\pi}{2}}$ **c)** $A_{\frac{498\pi}{2}}$ **d)** $B_{\frac{117\pi}{2}}$

50 [Raisonner.]

On considère le cercle trigonométrique ci-dessous dans lequel est inscrit un pentagone régulier IBCDE.

Donner, pour chaque sommet du pentagone, un réel qui lui est associé.



✔ Corrigé exercice 50 :

Comme le pentagone est régulier, on peut associer à I le réel 0, à B le réel $\frac{2\pi}{5}$, à C le réel $\frac{4\pi}{5}$, à D le réel $\frac{6\pi}{5}$ et à E le réel $\frac{8\pi}{5}$.

14) Activité C p. 183 (LivreScolaire) – *Une histoire de coordonnées* – Ch Re Mo – ★★

C Une histoire de coordonnées

Objectif Découvrir un nouveau type de repérage.



On sait repérer, à l'aide de coordonnées cartésiennes, des villes sur une carte.
Par exemple, le repère orthonormé ci-dessous (A) a pour origine Bordeaux et la droite reliant Bordeaux à Cherbourg est l'axe des ordonnées.

1. En utilisant ce repère, donner le plus précisément possible les coordonnées de Bordeaux, Nantes, Nancy et Clermont-Ferrand.

2. Sergei, grand amateur d'aviation, a entendu dire qu'il existait un autre système de coordonnées utilisé en navigation. Il s'agit des **coordonnées polaires**. Dans le repère ci-dessous (B), Bordeaux est toujours l'origine du repère et les coordonnées de Limoges sont $(2\,;30°)$.
   a) Donner une explication de la lecture des coordonnées polaires en s'aidant de celles de Limoges et celles de Toulouse qui sont $(2\,;-45°)$.

   AIDE Il faut trouver la signification de chacun des deux nombres : quelle interprétation graphique peut-on leur donner ?

   b) Déterminer les coordonnées polaires d'Amiens, de Cherbourg et de Besançon ainsi que la distance entre ces villes et Bordeaux.
   c) Quel pourrait être l'intérêt des coordonnées polaires, par exemple pour la navigation en bateau ou en avion ?

3. À partir des coordonnées polaires de Limoges, comment peut-on retrouver les coordonnées cartésiennes en utilisant des formules simples de trigonométrie ?

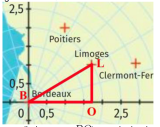




Bilan Un point M a pour coordonnées cartésienne $(x\,;y)$ dans un repère orthonormé $(O\,;I\,,J)$.
Comment retrouver ses coordonnées polaires $(r\,;\theta)$ où r est la distance à l'origine O et $\theta = \text{IOM}$?

✔ Questions :

1. On peut donner les coordonnées suivantes : Bordeaux $(0;0)$, Nantes $(-0,5;3)$, Nancy $(6;4)$ et Clermont-Ferrand $(3;1)$.
2.
   a. Le nombre 2 correspond à la distance entre l'origine du repère et la ville de Limoges. Le nombre –45 correspond à l'angle formé avec l'axe des abscisses, en tenant compte du sens indirect.
   b. Amiens admet pour coordonnées polaires $(6,5;60°)$, Cherbourg $(5,75;90°)$ et Besançon $(6;22,5°)$. Amiens se situe sur le cercle de centre Bordeaux et de rayon 6,5 donc la distance entre Bordeaux et Amiens est 6,5 unités. De même, on trouve que la distance entre Bordeaux et Cherbourg est 5,75 et celle entre Bordeaux et Besançon est 6.
   c. Grâce aux coordonnées polaires, on peut obtenir rapidement la distance entre un point et l'origine du repère. Ces coordonnées permettent également de facilement savoir si deux points sont alignés avec l'origine (si deux points ont le même angle).
3. Limoges admet comme coordonnées polaires $(2;30°)$. Pour trouver les coordonnées cartésiennes de cette ville dans ce repère à partir de ses coordonnées polaires, il suffit de se placer dans le triangle rectangle ci-dessous.



L'abscisse de la ville de Limoges (la longueur BO) se calcule alors via la formule $BL \times \cos(\widehat{LBO}) = 2 \times \cos(30)$ et son ordonnée via la formule $2 \times \sin(30)$. Limoges admet donc $(\sqrt{3};1)$ comme coordonnées cartésiennes.

Bilan :

Pour trouver les coordonnées cartésiennes $(x\,;y)$ d'un point dont on connaît les coordonnées polaires $(r\,;\theta)$, on utilise la formule suivante : $x = r \times \cos(\theta)$ et $y = r \times \sin(\theta)$.
À l'inverse, pour trouver les coordonnées polaires $(r\,;\theta)$ d'un point dont on connaît les coordonnées cartésiennes $(x\,;y)$, on utilise la formule : $r = \dfrac{x}{\cos(\theta)}$ et $\theta = \arccos\left(\dfrac{x}{r}\right)$.

index

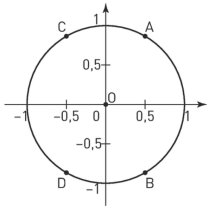
47 **1.** Tracer le cercle trigonométrique et placer le point A associé au réel $\frac{\pi}{3}$.

2. Placer le point B, symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses.
Donner les réels associés à ce point dans l'intervalle $[0 ; 2\pi[$, puis dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.

3. Placer le point C, symétrique de A par rapport à l'axe des ordonnées.
Donner les réels associés à ce point dans l'intervalle $[0 ; 2\pi[$, puis dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.

4. Placer le point D, symétrique de A par rapport à O.
Donner les réels associés à ce point dans l'intervalle $[0 ; 2\pi[$ puis dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.

✔ **47. 1.**



2. Voir la figure. Le réel associé au point B dans l'intervalle $[0 ; 2\pi[$ est $\frac{5\pi}{3}$; dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$, $-\frac{\pi}{3}$.

3. Voir la figure. Le réel associé au point C dans les intervalles $[0 ; 2\pi[$ et $]-\pi ; \pi]$ est $\frac{2\pi}{3}$.

4. Voir la figure. Le réel associé au point D dans l'intervalle $[0 ; 2\pi[$ est $\frac{4\pi}{3}$; dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$, $-\frac{2\pi}{3}$.

3 À l'aide du cosinus $\frac{\pi}{4}$, déterminer le cosinus de $\frac{3\pi}{4}$ et de $-\frac{3\pi}{4}$.

✔

3. $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

4 À l'aide du sinus de $\frac{\pi}{6}$, déterminer le sinus de $-\frac{\pi}{6}$ et de $-\frac{5\pi}{6}$.

✔

4. $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

$\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

28 **1.** À partir de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, déterminer $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ puis $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

2. Même question avec $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

✔

28. 1. $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

2. $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

29 **1.** À partir de $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$, déterminer $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ puis $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

2. Même question avec $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

3. En déduire $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.

✔

29. 1. $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3. $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

30 **1.** À partir de $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$, déterminer $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$.

2. Même question avec $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$.

✔

30. 1. $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

31 Placer sur le cercle trigonométrique les points associés aux réels suivants, puis déterminer le sinus et le cosinus de chaque réel.

a) $\frac{\pi}{6}$ **b)** $\frac{\pi}{4}$ **c)** $\frac{5\pi}{6}$

d) $\frac{13\pi}{6}$ **e)** $-\frac{3\pi}{4}$ **f)** $-\frac{11\pi}{3}$

✔

31. a) $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.

b) $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.

d) $\frac{13\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2\pi$ donc

$\cos\left(\frac{13\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

et $\sin\left(\frac{13\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.

e) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

f) $-\frac{11\pi}{3}=\frac{\pi}{3}-4\pi$ donc $\cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

et $\sin\left(-\frac{11\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

62 [Calculer.]

Sans calculatrice, calculer et réduire au même dénominateur les expressions suivantes. On pourra s'aider du cercle trigonométrique et on indiquera les étapes intermédiaires.

1. $\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{-7\pi}{4}\right)$
2. $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) - \sin(2\pi) + \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)$
3. $\cos(-2018\pi) - \cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
4. $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

✔ Corrigé exercice 62 :

1. $\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{-7\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$
2. $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) - \sin(2\pi) + \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} - 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$
3. $\cos(-2018\pi) - \cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$
4. $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-2+\sqrt{3}}{2}$

63 [Calculer.]

Sans calculatrice, calculer les expressions suivantes. On pourra s'aider du cercle trigonométrique et on indiquera les étapes intermédiaires s'il y en a.

1. $\cos^2\left(\frac{-\pi}{13}\right)+\sin^2\left(\frac{-\pi}{13}\right)$
2. $\cos^2\left(\frac{-\pi}{6}\right)-\sin^2\left(\frac{-\pi}{6}\right)$
3. $\sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right)\times\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)-\cos(-\pi)$
4. $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

✔ Corrigé exercice 63 :

1. $\cos^2\left(\frac{-\pi}{13}\right)+\sin^2\left(\frac{-\pi}{13}\right)=1$ car pour tout x réel, $cos(x)^2+sin(x)^2=1$.
2. $\cos^2\left(\frac{-\pi}{6}\right)-\sin^2\left(\frac{-\pi}{6}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$
3. $\sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right)\times\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)-\cos(-\pi)=\frac{-1}{2}\times\frac{-1}{2}+1=\frac{5}{4}$
4. $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=2\sqrt{2}$

5 Résoudre sur $]-\pi\,;\pi]$ l'équation $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$.

✔

5. $\mathcal{S}_{]-\pi;\pi]} = \left\{-\frac{\pi}{3}\,;\frac{\pi}{3}\right\}$

25) Exercice d'application 6 p. 206 (Sesamath) – *Inéquation trigonométrique* – Ra Re – ★★

6 Résoudre sur $[0 ; 2\pi[$ l'inéquation $\cos(\alpha) \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ✔

6. $\mathcal{S}_{[0;2\pi[} = \left[\dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{7\pi}{4}\right]$

26) Exercice d'application 7 p. 206 (Sesamath) – *Équation trigonométrique* – Ra Re – ★

7 Résoudre sur $[0\,;\,2\pi[$ l'équation $\sin(\alpha) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

✔

7. $\mathcal{S}_{]0;2\pi]} = \left\{ \dfrac{4\pi}{3} ; \dfrac{5\pi}{3} \right\}$

8 Résoudre sur $]-\pi\,;\pi]$ l'inéquation $\sin(\alpha) < \frac{1}{2}$.

✔

8. $\mathcal{S}_{]-\pi;\pi]} = \left]-\pi\,;\frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6}\,;\pi\right]$

9 Résoudre sur $]-\pi\,;\pi]$ le système d'inéquations suivant.

$$\begin{cases} \cos(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(x) \leqslant \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

✔

9. $\mathcal{S}_{]-\pi;\pi]} = \left]-\pi\ ;-\dfrac{\pi}{6}\right[\cup \left]\dfrac{5\pi}{6}\ ;\pi\right]$

10 Résoudre sur $]-\pi\,;\pi]$ le système d'inéquations suivant.

$$\begin{cases} \cos(x) \leqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(x) \geqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

✔ **10.** $\mathcal{S}_{]-\pi;\pi]} = \left]-\pi\ ;-\dfrac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{4}\,;\pi\right]$

11 Résoudre sur $[0\,;2\pi[$ le système d'inéquations suivant.

$$\begin{cases} \cos(x) \leqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

✔

11. $\mathcal{S}_{[0;2\pi[} = \left[\dfrac{5\pi}{6}\,;\,\pi\right]$

12 Résoudre sur $[0\,;2\pi[$ le système d'inéquations suivant.

$$\begin{cases} \cos(x) \geqslant 0 \\ \sin(x) \geqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

✔

12. $\mathcal{S}_{[0;2\pi[} = \left[-\dfrac{\pi}{3}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$

34 x est un réel tel que $\sin(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Donner toutes les valeurs possibles pour $3x$.

2. En déduire alors toutes les valeurs possibles pour x.

3. En déduire les solutions de l'équation $\sin(3x)$ sur l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.

✔ Corrigé exercice 34 :

1. En utilisant le tableau des valeurs remarquables et un cercle trigonométrique, on obtient que les valeurs possibles pour $3x$ sont : $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ et $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, k étant un entier naturel.
2. En divisant ces valeurs possibles par 3, on obtient que les valeurs possibles de x sont celles qui s'écrivent sous la forme : $\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi$ et $\frac{2\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi$, k étant un entier naturel.
3. Sur cet intervalle, les solutions sont donc : $\frac{\pi}{9}$, $\frac{7\pi}{9}$, $\frac{-5\pi}{9}$, $\frac{2\pi}{9}$, $\frac{8\pi}{9}$ et $\frac{-4\pi}{9}$.

61 **1.** Résoudre sur $]-\pi\,;\,\pi]$ l'inéquation $\sqrt{2}\cos(x)<1$.

2. Résoudre sur $]-\pi\,;\,\pi]$ l'inéquation $\sqrt{2}\sin(x)\geqslant\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

✔

61. 1. $\sqrt{2}\cos(x)<1$

$$\cos(x)<\frac{\sqrt{2}}{2}$$

D'où $\mathcal{S}_{]-\pi\,;\,\pi]}=\left]-\pi\,;-\dfrac{\pi}{4}\right[\cup\left]\dfrac{\pi}{4}\,;\,\pi\right]$.

2. $\sqrt{2}\sin(x)\geqslant\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$\sin(x)\geqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, d'où $\mathcal{S}_{]-\pi\,;\,\pi]}=\left[\dfrac{\pi}{3}\,;\,\dfrac{2\pi}{3}\right]$.

63 On considère l'équation suivante, d'inconnue réelle x :
(F) : $-\cos^2(x) - 2\sin(x) + 2 = 0$.

1. Montrer que résoudre (F) revient à résoudre l'équation d'inconnue réelle x, (G) : $\sin^2(x) - 2\sin(x) + 1 = 0$.

2. On pose $X = \sin(x)$. Résoudre l'équation $X^2 - 2X + 1 = 0$.

3. En déduire les solutions réelles de l'équation (F).

✔

63. 1. (F) : $-\cos^2(x) - 2\sin(x) + 2$
$= 0 - (1 - \sin^2(x)) - 2\sin(x) + 2 = 0$
$\sin^2(x) - 1 - 2\sin(x) + 2 = 0$
$\sin^2(x) - 2\sin(x) + 1 = 0$

2. On pose $X = \sin(x)$.
$X^2 - 2X + 1 = 0$
$(X - 1)^2 = 0$
$X = 1$

3. $X = 1$ revient à $\sin(x) = 1$
d'où $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$.

35) Activité A p. 204 (LivreScolaire) – *Découverte des fonctions* – Ra Re Mo – ★★

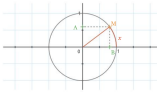
A Découverte des fonctions cosinus et sinus

À travers les définitions données et étudiées au chapitre précédent, nous allons aborder un point de vue fonctionnel de la trigonométrie.

Objectif Découvrir les fonctions cosinus et sinus, leur courbe représentative ainsi que leurs propriétés respectives.

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit x un réel quelconque, on considère son point image M par enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique.
Les fonctions cosinus et sinus sont définies simplement en associant à chaque réel x le cosinus et le sinus de l'angle au centre associé.



1. Rappeler comment exprimer les coordonnées de M en fonction de x. À quel intervalle appartient l'abscisse de M ? Et l'ordonnée de M ?
2. Quelles sont les coordonnées du point M', point image du réel $-x$? On proposera deux écritures différentes.
3. En partant du point M associé à x, on effectue un tour complet du cercle trigonométrique dans le sens direct.
   a) Sur quel point du cercle arrive-t-on ?
   b) Justifier que le nombre $x+2\pi$ est associé à ce point.
   c) Comparer alors $\cos(x)$ et $\cos(x+2\pi)$ ainsi que $\sin(x)$ et $\sin(x+2\pi)$.
4. Dans un repère orthogonal, on souhaite tracer les courbes C_1 et C_2 représentant respectivement les fonctions cosinus et sinus.
   a) Justifier que C_1 est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
   b) Quelle propriété graphique sur la courbe C_2 est justifiée par la question 3 ?
5. Comment traduire graphiquement les réponses données à la question 3 ?
6. En visite à Londres, Charly monte dans une cabine de la grande roue située au bas de celle-ci. On assimile la grande roue au cercle trigonométrique en prenant comme unité le rayon de celle-ci et comme origine son centre.
   Charly effectue alors trois tours complets à vitesse constante. On s'intéresse à son altitude h en mètre en fonction du temps t en seconde.
   À $t=0$, on a donc $h=-1$ dans le repère choisi.
   a) Quelle sera l'altitude de Charly lorsqu'il aura effectué un quart de tour ? un demi-tour ? un tour complet ?
   b) Quelle fonction trigonométrique peut modéliser la situation ? Justifier.
   c) Comment peut-on interpréter les résultats de la question 6 dans ce contexte là ?

Bilan **Quelle propriété les fonctions cosinus et sinus ont-elles en commun ? Quelle propriété les sépare ?**

Aide
A On pourra essayer de placer dans un repère des points particuliers, par exemple pour $x=\frac{\pi}{3}$ et $x=-\frac{\pi}{3}$ on a alors $x=\frac{\pi}{6}$ et $x=-\frac{\pi}{6}$.

Remarque A Une fonction vérifiant $f(-x)=f(x)$ pour tout x de son ensemble de définition est paire. De même, une fonction vérifiant $f(-x)=-f(x)$ pour tout x de son ensemble de définition est impaire.

Remarque B Une fonction f définie sur D_f est périodique de période T si pour tout $x\in D_f$, on a $x+T\in D_f$ et $f(x+T)=f(x)$.



✔ Corrigé activité A :

Questions :

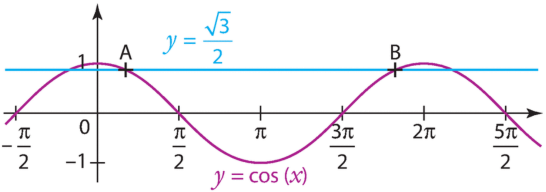
1. Les coordonnées de M sont $(\cos x;\sin x)$. L'abscisse et l'ordonnée sont tous deux dans l'intervalle $[-1;1]$.
2. On sait que $\cos -x=\cos x$ et que $\sin -x=-\sin x$. Donc $M'(\cos(-x),\sin(-x))$ ou $M'(\cos(x),-\sin(x))$.
3. a. On arrive sur le même point M.
   b. Si on effectue un tour entier, cela revient à ajouter 2π au réel x. Donc $x+2\pi$ est également associé au point M.
   c. On en déduit que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\cos(x+2\pi)=\cos x$ et $\sin(x+2\pi)=\sin x$.
4. a. Les points de C_1 sont tous les $P(x;\cos x)$. Le symétrique de $(x;\cos x)$ par rapport à l'axe des ordonnées est $(-x;\cos x)$ qui est aussi sur C_1. La courbe représentative du cosinus présente donc une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
   b. Les points de C_2 sont tous les $Q(x;\sin x)$. Le symétrique de $(x;\sin x)$ par rapport à l'axe des ordonnées est $(-x;-\sin x)$ qui est aussi sur C_2. La courbe représentative du sinus présente donc une symétrie par rapport à l'origine.
5. Les sinus et cosinus ne changent pas par l'ajout d'un multiple entier de 2π. La courbe se répète sur chaque intervalle de longueur 2π. Les courbes C_1 et C_2 sont invariantes par translation horizontale de longueur 2π.
6. a. Après un quart de tour, il sera à une altitude de 0. Après un demi-tour, il sera à une altitude de 1. Après un tour complet, retour au départ avec une altitude de –1.
   b. On peut modéliser cela à l'aide de la fonction sinus. En effet, sur le cercle trigonométrique, le sinus est lu sur l'axe des ordonnées, et c'est l'ordonnée qui correspond ici à l'altitude.
   c. Le comportement de tous les tours sera exactement le même que celui du premier.

Bilan :

Les fonctions sinus et cosinus sont toutes deux périodiques. La fonction cosinus est paire, la fonction sinus est impaire.

index

37 **1.** Donner les abscisses des points A et B.



2. Résoudre sur $[0 ; 2\pi[$ l'équation $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Résoudre sur $[0 ; 2\pi[$ l'inéquation $\cos(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

✔

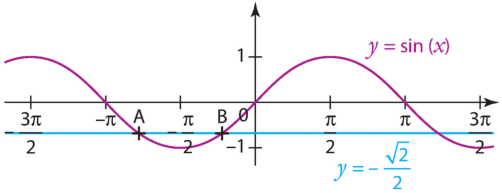
37. 1. L'abscisse de A est $\dfrac{\pi}{6}$, celle de B est $\dfrac{11\pi}{6}$.

2. Par lecture graphique, $\mathcal{S}_{[0;\,2\pi[} = \left\{\dfrac{\pi}{6} ; \dfrac{11\pi}{6}\right\}$.

3. Nous cherchons les abscisses pour lesquelles la courbe violette est située en dessous de la courbe bleue, d'où

$\mathcal{S}_{[0;2\pi[} = \left[\dfrac{\pi}{6} ; \dfrac{11\pi}{6}\right]$.

38 **1.** Donner les abscisses des points A et B.



2. Résoudre sur $]-\pi\,;\,\pi]$ l'équation $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Résoudre sur $]-\pi\,;\,\pi]$ l'inéquation $\sin(x) \geqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Déduire de l'abscisse du point A celle du point C.

✔

38. 1. L'abscisse de A est $-\dfrac{3\pi}{4}$, celle de B est $-\dfrac{\pi}{4}$.

2. Par lecture graphique, $\mathcal{S}_{]-\pi;\,\pi[} = \left\{\dfrac{-3\pi}{4}\,;\,-\dfrac{\pi}{4}\right\}$.

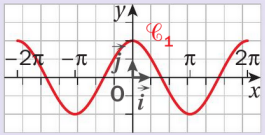
3. Nous cherchons les abscisses pour lesquelles la courbe violette est située au-dessus de la courbe bleue, d'où

$$\mathcal{S}_{]-\pi\,;\,\pi]} = \left]-\pi\ ;-\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{4}\,;\,\pi\right].$$

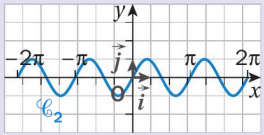
4. L'abscisse du point C est égale à $-\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi = \dfrac{5\pi}{4}$.

77 Dans chaque cas, émettre une conjecture quant à la parité de la fonction représentée. Justifier.

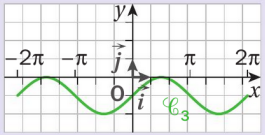
a.



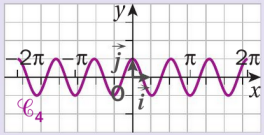
b.



c.



d.



✔ **77 a.** Paire.

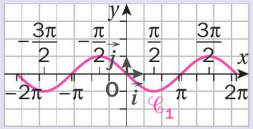
b. Impaire.

c. Ni paire, ni impaire.

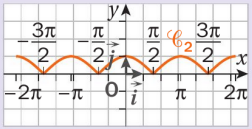
d. Paire.

78 Dans chaque cas, émettre une conjecture quant la périodicité de la fonction représentée. Justifier.

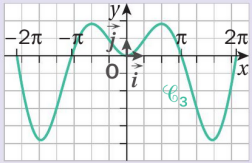
a.



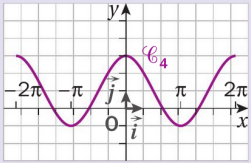
b.



c.



d.



✔

78 a. Impaire, et de période 2π.

b. Paire et de période π.

c. Paire et de période 3π.

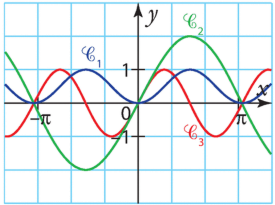
d. Paire et de période 2π.

42 Soit trois fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(2x)$; $g(x) = 2\sin(x)$ et $h(x) = \sin^2(x)$.

1. Montrer que f et g sont impaires.
Interpréter graphiquement.

2. Montrer que h est paire.
Interpréter graphiquement.

3. f, g et h sont représentées dans le repère ci-dessous.



Associer à chaque fonction sa courbe représentative.
Justifier.

✔ **42. 1.** $f(-x) = \sin(2(-x)) = \sin(-2x) = -\sin(2x) = -f(x)$ et $g(-x) = 2\sin(-x) = -2\sin(x) = -g(x)$.

Donc f et g sont impaires.

Graphiquement, leurs courbes représentatives, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, sont donc symétriques par rapport à l'origine du repère.

2. $h(-x) = \sin^2(-x) = (-\sin(x))^2 = \sin^2(x) = h(x)$

Donc h est paire.

Graphiquement, sa courbe représentative $\mathscr{C}_h$ est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

3. $\mathscr{C}_1$ est la seule courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, donc $\mathscr{C}_1 = \mathscr{C}_h$.

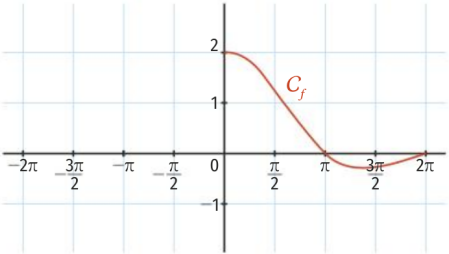
De plus, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{2}\right) = \sin(\pi) = 0$,

et $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \times 1 = 2$.

Donc $\mathscr{C}_2 = \mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_3 = \mathscr{C}_f$.

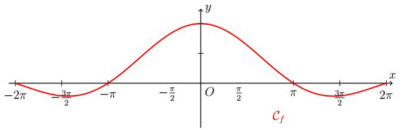
40 [Représenter.]

Sachant que la fonction f est une fonction paire, recopier et compléter le graphe ci-dessous à main levée sur $[-2\pi\,;\,2\pi]$.



✔ Corrigé exercice 40 :

La fonction étant paire, elle admet une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.



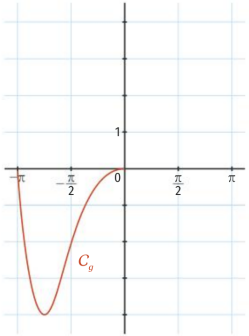
42) Exercice d'application 41 p. 216 (LivreScolaire)

– Compléter une fonction –

Ra Re – ★★

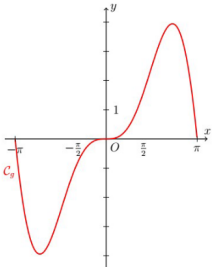
41 [Représenter.]

Sachant que la fonction g est une fonction impaire, recopier et compléter le graphe ci-dessous à main levée sur $[-\pi\,;\pi]$.



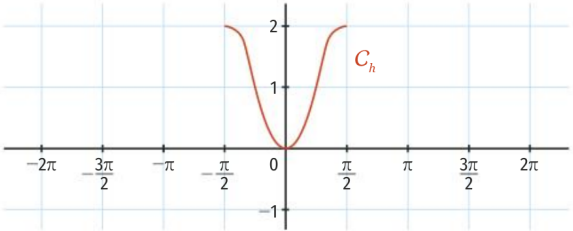
✔ Corrigé exercice 41 :

La fonction étant impaire, elle admet une symétrie par rapport à l'origine.



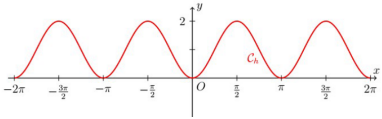
42 [Représenter.]

Sachant que la fonction h est une fonction π-périodique, recopier et compléter le graphe ci-dessous à main levée sur $[-2\pi\,;2\pi]$.



✔ Corrigé exercice 42 :

La fonction h est π-périodique et le bout de courbe tracé est de longueur π. Il suffit de répéter le morceau donné à droite et à gauche.



68 On considère la fonction tangente, notée tan, définie par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. On notera $\mathscr{C}_{\tan}$ sa courbe représentative.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(x) = 0$. En déduire le domaine de définition de la fonction tangente.

2. Montrer que tan est impaire. Interpréter graphiquement.

3. Montrer que tan est π-périodique. Interpréter graphiquement.

4. Recopier et compléter le tableau suivant.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\cos(x)$				
$\sin(x)$				
$\tan(x)$				

5. Tracer la représentation graphique de tan sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{3\pi}{2}\right[$.

✔

68. 1. $\cos(x) = 0$ si $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ donc

$D_{\tan} = \mathbb{R} - \left\{x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. $\tan(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$, donc tan est impaire.

Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'origine du repère.

3. $\tan(x + \pi) = \dfrac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \dfrac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$,

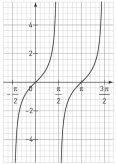
donc tan est π-périodique.

Graphiquement cela signifie que la courbe représentative de la fonction tangente présente une répétition du « même motif de courbe de longueur π ».

4.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

5.



45) Problème 50 p. 210 (Sesamath)

– *Codage* –

Ra Re – ★★

Pour les exercices 50 et 51 on utilisera le tableau suivant.

A	B	C	D	E	F	
0	$\frac{\pi}{13}$	$\frac{2\pi}{13}$	$\frac{3\pi}{13}$	$\frac{4\pi}{13}$	$\frac{5\pi}{13}$	
G	H	I	J	K	L	M
$\frac{6\pi}{13}$	$\frac{7\pi}{13}$	$\frac{8\pi}{13}$	$\frac{9\pi}{13}$	$\frac{10\pi}{13}$	$\frac{11\pi}{13}$	$\frac{12\pi}{13}$
N	O	P	Q	R	S	
π	$\frac{14\pi}{13}$	$\frac{15\pi}{13}$	$\frac{16\pi}{13}$	$\frac{17\pi}{13}$	$\frac{18\pi}{13}$	
T	U	V	W	X	Y	Z
$\frac{19\pi}{13}$	$\frac{20\pi}{13}$	$\frac{21\pi}{13}$	$\frac{22\pi}{13}$	$\frac{23\pi}{13}$	$\frac{24\pi}{13}$	$\frac{25\pi}{13}$

50. On souhaite coder un message en utilisant le procédé suivant :

- on relève la mesure de l'angle correspondant à la lettre à coder ;
- on rajoute $\frac{4\pi}{13}$ à cette mesure d'angle ;
- on relève la lettre correspondante à cette nouvelle mesure.

Par exemple la lettre B est codée par la lettre F, en effet $\frac{\pi}{13}+\frac{4\pi}{13}=\frac{5\pi}{13}$.

1. Coder le mot MATHS.
2. Décoder le mot GIVGPI.

✔

50. 1. En ajoutant $\frac{4\pi}{13}$ à chaque mesure, on trouve le mot QEXLW.

2. En enlevant $\frac{4\pi}{13}$ à chaque mesure, on trouve le mot CERCLE.

46) Problème 51 p. 210 (Sesamath) – *Codage* – Ra Re – ★★★

Pour les exercices 50 et 51 on utilisera le tableau suivant.

A	B	C	D	E	F	
0	$\frac{\pi}{13}$	$\frac{2\pi}{13}$	$\frac{3\pi}{13}$	$\frac{4\pi}{13}$	$\frac{5\pi}{13}$	
G	H	I	J	K	L	M
$\frac{6\pi}{13}$	$\frac{7\pi}{13}$	$\frac{8\pi}{13}$	$\frac{9\pi}{13}$	$\frac{10\pi}{13}$	$\frac{11\pi}{13}$	$\frac{12\pi}{13}$
N	O	P	Q	R	S	
π	$\frac{14\pi}{13}$	$\frac{15\pi}{13}$	$\frac{16\pi}{13}$	$\frac{17\pi}{13}$	$\frac{18\pi}{13}$	
T	U	V	W	X	Y	Z
$\frac{19\pi}{13}$	$\frac{20\pi}{13}$	$\frac{21\pi}{13}$	$\frac{22\pi}{13}$	$\frac{23\pi}{13}$	$\frac{24\pi}{13}$	$\frac{25\pi}{13}$

51 On souhaite coder un message en utilisant le procédé suivant :
• on relève la mesure de l'angle correspondant à la lettre à coder ;
• on multiplie par 3 puis on ajoute $\frac{5\pi}{13}$ à cette mesure d'angle ;
• on relève la lettre correspondante à cette nouvelle mesure.
Par exemple la lettre B est codée par la lettre I, en effet $3\times\frac{\pi}{13}+\frac{5\pi}{13}=\frac{3\pi}{13}+\frac{5\pi}{13}=\frac{8\pi}{13}$.

1. Coder le mot CRYPTER.
2. Décoder le mot ERKPI.
3. On change légèrement le procédé : au lieu d'ajouter $\frac{5\pi}{13}$, on enlève $\frac{21\pi}{13}$. Le codage est-il le même ? Pourquoi ?

✔

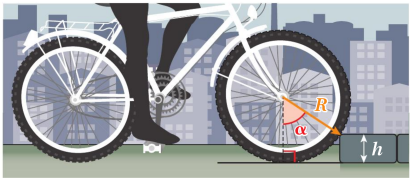
51. 1. Pour C : $3\times\frac{2\pi}{13}+\frac{5\pi}{13}=\frac{6\pi+5\pi}{13}=\frac{11\pi}{13}$ donc C correspond à la lettre L.

En procédant ainsi pour chaque lettre, on trouve le mot LEZYKRE.

2. Pour E : $\frac{4\pi}{13}-\frac{5\pi}{13}=-\frac{\pi}{13}$ ce qui correspond à $\frac{25\pi}{13}$, mais aussi à $\frac{51\pi}{13}$. Or $\frac{51\pi}{13}\times\frac{1}{3}=\frac{17\pi}{13}$ donc E correspond à la lettre R. En procédant ainsi pour chaque lettre, on trouve le mot RETMB.

47) Problème 73 p. 205 (Variations) – VTT – Ca Ch Ra Mo – ★★

73 Jusqu'en 2012 le diamètre des roues des VTT Adulte était de 26 pouces. Depuis 2015, tous les constructeurs de VTT ont abandonné ce diamètre. Les vélos sont maintenant équipés de roues à 27,5 pouces ou de roues à 29 pouces. Lorsque la roue de rayon R rencontre un obstacle de hauteur h, le cycliste a un effort à produire pour franchir cet obstacle. Plus l'angle α est petit, moins l'effort est important.



a. Pour une hauteur h de 8 pouces, calculer la mesure de l'angle α (en degrés) avec chacune des trois mesures de diamètre.

b. Interpréter les résultats obtenus.

✔

73 a.



• Le diamètre est de 26 pouces ($R = 13$).
Le triangle OAH est rectangle en H. Donc $\cos \widehat{HOA} = \frac{OH}{OA}$

$$\cos(\alpha) = \frac{13-8}{13} \Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{5}{13}$$
$$\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{5}{13}\right).$$

D'où $\alpha \approx 67{,}4°$.

• Le diamètre est de 27,5 pouces ($R = 13{,}75$).
Le triangle OAH est rectangle en H.
Donc $\cos \widehat{HOA} = \frac{OH}{OA}$.

$$\cos(\alpha) = \frac{13{,}75-8}{13{,}75} \Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{5{,}75}{13{,}75}$$
$$\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{5{,}75}{13{,}75}\right).$$

D'où $\alpha \approx 65{,}3°$.

• Le diamètre est de 29 pouces ($R = 14{,}5$).
Le triangle OAH est rectangle en H.
Donc $\cos \widehat{HOA} = \frac{OH}{OA}$.

$$\cos(\alpha) = \frac{14{,}5-8}{14{,}5} \Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{6{,}5}{14{,}5}$$
$$\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{6{,}5}{14{,}5}\right).$$

D'où $\alpha \approx 63{,}4°$.

b. Avec des roues de 27,5 ou 29 pouces, l'effort à fournir lorsqu'on rencontre un obstacle est moins important qu'avec des roues de 26 pouces car plus le diamètre est grand, plus l'angle α est petit. C'est avec des roues de 29 pouces que l'effort à fournir est le moins important.

75 Inéquations et architecture

Un tennis club possède un gymnase de forme demi-cylindrique, dont un schéma en coupe est représentée ci-dessous. L'unité graphique est égale à 10 m.



1. On souhaite installer des gradins hauts de 5 m de chaque côté du court central situé à l'intérieur de ce gymnase.

a) Résoudre dans $[0\,;\pi]$ l'équation $\sin(x)=\frac{1}{2}$.

b) En déduire les positions limites au sol des gradins.

c) On décide d'installer une guirlande lumineuse le long du plafond, d'un gradin à l'autre. Quelle longueur de guirlande va-t-on utiliser ?

2. On décide finalement d'installer une guirlande lumineuse horizontale longue de 10 m au plafond, de manière symétrique par rapport au sommet du gymnase.

a) Résoudre dans $[0\,;\pi]$ l'inéquation $-\frac{1}{2}\leqslant\cos(x)\leqslant\frac{1}{2}$.

b) On admet que la personne qui fixe la guirlande mesure 1,80 m et que ses bras ne doivent pas dépasser le haut de sa tête au moment de l'installation.
En déduire la hauteur minimale de l'échafaudage pour pouvoir exécuter cette manœuvre.

✔ 75. Inéquations et architecture

1. a) $\mathscr{S}_{[0\,;\pi]}=\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right\}$.

b) $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. L'unité graphique étant de 10 m, on obtient $\frac{\sqrt{3}}{2}\times 10=5\sqrt{3}\approx 8{,}66$ m.
Donc les positions limites des gradins au sol sont d'environ 8,66 m de chaque côté du court.

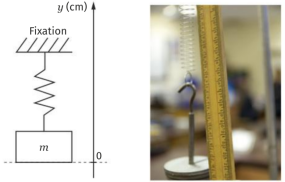
c) La longueur d'arc associée est égale à $\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)\times 10=\left(\frac{4\pi}{6}\right)\times 10=\frac{20\pi}{3}\approx 20{,}94$ m.
Donc on va utiliser environ 20,94 m de guirlande.

2. a) $\mathscr{S}_{[0\,;\pi]}=\left\{\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right\}$

b) La guirlande se trouve à une hauteur de $5\sqrt{3}$ m.
Donc la hauteur minimale de l'échafaudage est de $5\sqrt{3}-1{,}80\approx 6{,}86$ m.

75 EN PHYSIQUE [Modéliser.]

On suspend une masse m à un ressort. On note y la hauteur relative de la masse. La valeur $y = 0$ correspond à l'équilibre lorsque la masse est immobile. On amène la masse à 10 cm de hauteur puis on la lâche. On suppose qu'il n'y a pas d'amortissement des oscillations. Les oscillations pour $t \geqslant 0$ (t en seconde) sont données par $y(t) = 10\cos(3t)$. On remarque qu'au temps $t_0 = 0$, on a $y(t_0) = 10$.



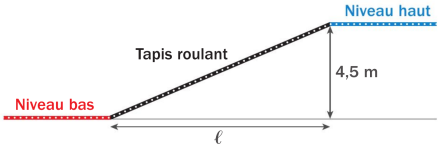
1. Pour quel temps t_1 la masse va passer pour la première fois par sa position d'équilibre $y = 0$?
2. Pour quel temps t_2 la masse va repasser pour la deuxième fois par sa position d'équilibre ?
3. Quelle est la période des oscillations de la masse ?
4. Quelle sera la hauteur maximale de la masse ? Et la hauteur minimale ?

✔ Corrigé exercice 75 :

1. On cherche la première annulation de $\cos(3t)$. Cela se produit pour $3t_1 = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow = t_1 = \dfrac{\pi}{6}$.
2. On cherche la deuxième annulation de $\cos(3t)$. Le temps t_2 vérifie que $3t_2 = \dfrac{3\pi}{2} \Leftrightarrow t_2 = \dfrac{\pi}{2}$.
3. Entre le temps t_1 et le temps t_2 il ne s'est passé qu'une demie-période. On peut donc calculer $T = 2\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{4\pi}{6} = \dfrac{2\pi}{3}$.
4. La masse va osciller entre +10 cm et –10 cm autour de la position d'équilibre car 10 et –10 sont respectivement le maximum et le minimum de la fonction $t \mapsto \cos(3t)$.

99 Le tapis roulant — En groupe

Dans un aéroport en construction, un architecte souhaite installer un tapis roulant pour permettre au public de passer d'un niveau à l'autre en moins d'une minute.



Le tapis roulant sélectionné, représenté ci-dessus, possède une vitesse de roulement de 0,8 m·s^{-1} et une pente maximale de 10 %. La distance entre les deux niveaux est de 4,5 m et on note ℓ la longueur au sol du niveau bas occupée par le tapis roulant.

- Donner un encadrement de la longueur ℓ pour que les contraintes soient satisfaites. On pourra utiliser un logiciel ou la calculatrice.

✔ **99** La longueur de l'escalator : $L = \dfrac{4{,}5}{\sin(\alpha)}$.

Les contraintes sur la pente entraînent que : $0 \leqslant L \leqslant 0{,}8 \times 60 = 48$.

Donc $\dfrac{4{,}5}{\sin(\alpha)} \leqslant 48$ et $4{,}5/48 \leqslant \sin(\alpha)$

Finalement : $0{,}094 \leqslant \alpha$.

De plus comme la pente est inférieure à 10 %, ce qui donne $\alpha \leqslant 0{,}099$

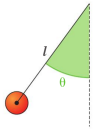
$0{,}094 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}099$

$0{,}094 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}0994$

$45{,}27 \leqslant L \leqslant 47{,}88$, la longueur est entre 45,27 m et 47,88 m.

105 Un pendule simple

Une caméra a permis de filmer le mouvement d'un pendule simple (une image toutes les 100 ms).

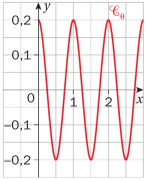


La mesure, image par image, de l'élongation angulaire $\theta(t)$, exprimée en radians, en fonction du temps t, exprimé en secondes, est définie par :

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(2\pi \frac{t}{T_0}\right)$$

où θ_m est l'élongation angulaire maximale et T_0 la période d'oscillation.

a. À l'aide de la courbe représentative de la fonction θ représentée ci-dessous, déterminer la valeur de θ_m et celle de T_0.



b. En déduire l'expression de l'élongation angulaire $\theta(t)$ de ce pendule en fonction de t.

c. Calculer la longueur l (en m) de ce pendule sachant que, pour ce type de pendule, on a :

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ avec $g = 9{,}81$ m·s^{-1}.

✔ **105 a.** Par lecture $\theta_m = 0{,}2$ et $T_0 = 1$.

b. $\theta(t) = 0{,}2\cos(2\pi t)$.

c. $1 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ soit $\ell = \frac{g}{4\pi^2} \approx 0{,}248$ m.