Trigonométrie – exercices

Géométrie

I. Cercle trigonométrique

1) Act. A p. 168 (L.) – *Unité astronomique* – Ca Re ★
2) App. 4 p. 128 – *Horloge trigonométrique* – Re ★
3) App. 6 p. 128 – *Rotations au snowboard* – Ca ★
4) App. 23 p. 180 (L.) – *Placer sur le cercle* – Re ★
5) App. 24 p. 180 (L.) – *Degrés en radians* – Ca ★
6) App. 28 p. 180 (L.) – *Longueur d'un arc de cercle* – Re ★
7) Ex. 29-30 p. 180 (L.) – *Triangle équilatéral* – Re ★
8) Ex. 5 p. 128 – *Troisième côté d'un triangle* – Re ★
9) Ex. 56 p. 182 (L.) – *Longueur d'un arc de cercle* – Re ★★★

II. Angle orienté de vecteurs

10) App. 31 p. 180 (L.) – *Illustration d'angles* – Re ★
11) App. 7 p. 128 – *Placer des points* – Re ★
12) App. 10 p. 129 – *Angles orientés* – Re ★
13) Ex. 8 p. 128 – *Rosace* – Re ★
14) App. 15 p. 129 – *Placer des points* – Re ★
15) App. 11 p. 129 – *Se déplacer sur un cercle* – Re ★★
16) App. 12 p. 129 – *Se déplacer sur un cercle* – Re ★★
17) App. 16 p. 130 – *Mesure principale* – Ca ★
18) App. 33 p. 180 (L.) – *Mesure principale* – Ca ★
19) App. 34 p. 180 (L.) – *Mesure principale* – Ca ★
20) App. 35 p. 180 (L.) – *Mesure principale* – Ca ★
21) App. 60 p. 182 (L.) – *Mesure principale* – Ca ★
22) App. 61 p. 182 (L.) – *Mesure principale* – Ca ★★
23) App. 62 p. 182 (L.) – *Angle dans un intervalle* – Ca ★★
24) Ex. 32 p. 180 (L.) – *Angles égaux* – Ra ★

III. Cosinus et sinus d'un angle orienté

1) Généralités

25) Act. B p. 168 (L.) – *Découvrir la trigonométrie* – Ra Re ★
26) Ex. 27 p. 131 – *Signes trigonométriques* – Re Ma ★

2) Symétries du cercle trigonométrique

27) Act. 23 p. 131 – *Angles associés* – Ra Re ★★
28) App. 38 p. 180 (L.) – *Calculs associés* – Ra Re ★
29) App. 24 p. 131 – *Calculs associés* – Ra Re ★
30) App. 25 p. 131 – *Calculs associés* – Ra Re ★★
31) App. 36 p. 180 (L.) – *Calculs associés* – Ra Re ★★
32) App. 67 p. 183 (L.) – *Calculs associés* – Ra Re ★★
33) App. 68 p. 183 (L.) – *Calculs associés* – Ra Re ★★
34) App. 40 p. 180 (L.) – *Égalités de cosinus* – Ra ★
35) Prob. 94 p. 187 (L.) – *Hélice* – Ch Ma ★★★

IV. Équations trigonométriques

36) App. 22 p. 131 – *Mesure de l'angle* – Re ★
37) App. 33 p. 132 – *Équations trigonométriques* – Ra Re ★★
38) App. 34 p. 132 – *Équations trigonométriques* – Ra Re ★★
39) App. 35 p. 132 – *Équations trigonométriques* – Ra Re ★★
40) App. 39 p. 180 (L.) – *Équations trigonométriques* – Ra Re ★★
41) App. 41 p. 181 (L.) – *Équations trigonométriques* – Ra Re ★★
42) App. 42 p. 181 (L.) – *Équations trigonométriques* – Ra Re ★★
43) App. 70 p. 183 (L.) – *Équations trigonométriques* – Ca Re ★★
44) App. 71 p. 183 (L.) – *Équations trigonométriques* – Ca Re ★★
45) Prob. 93 p. 186 (L.) – *Pêche au vol* – Ch Ma ★★★

V. Pour aller plus loin

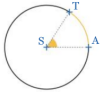
46) Prob. 73 p. 183 (L.) – *Équations avec trigonométrie* – Ca ★★
47) Prob. 74 p. 183 (L.) – *Équations avec trigonométrie* – Ca ★★★

1) Activité A p. 168 (L.Sco.)

– Unité astronomique –

Ca Re – ★

Objectif **Introduire la mesure d'un angle en radian.**



En astronomie, l'**unité astronomique**, notée u.a., est une unité de mesure qui correspond à la distance Terre-Soleil. On a 1 u.a. $\approx 150 \times 10^6$ km.

On considère que la Terre tourne à vitesse constante autour du Soleil en décrivant un cercle de centre S, où se trouve le Soleil, et de rayon 1 u.a.

Au 1er janvier, la Terre se trouve en position A. La Terre décrit alors un arc de cercle $\overset{\frown}{\mathrm{AT}}$, mesuré en u.a., et un angle $\widehat{\mathrm{AST}}$, mesuré en degré.

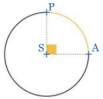
AIDE **1 a)** On suppose que la Terre fait un tour autour du Soleil en une année et on rappelle que le périmètre d'un cercle de rayon r est $2\pi r$.

1 a) Quelle est la distance parcourue (en u.a.) par la Terre en une année ? En six mois ? En un mois ? Les résultats seront écrits en notation scientifique avec deux décimales.

b) Déterminer l'angle $\widehat{\mathrm{AST}}$ correspondant à la position de la Terre dans chacun des cas de la question précédente.

c) La distance parcourue par la Terre est-elle proportionnelle à la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{AST}}$?

2 On note d la distance parcourue par la Terre depuis le point A. Compléter le tableau, sachant que la Terre n'a pas parcouru plus d'un tour autour du Soleil.



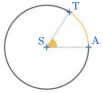
Angle $\widehat{\mathrm{AST}}$	30°	45°	60°	90°	180°	360°
d (en u.a.)	$\frac{\pi}{6}$					

3 a) Quelle est la distance parcourue par la Terre en trois ans et demi ?

b) La Terre se trouve en position P représentée ci-dessus. Sans connaître le nombre de tours effectués avant d'arriver à ce point, il n'est pas possible de savoir quelle est la distance parcourue par la Terre. Donner néanmoins plusieurs exemples possibles de distances parcourues pour arriver au point P en partant de A.

Bilan **Quel lien existe-t-il entre un angle mesuré en degré et la longueur de l'arc associé ?**

Objectif **Introduire la mesure d'un angle en radian.**



En astronomie, l'**unité astronomique**, notée u.a., est une unité de mesure qui correspond à la distance Terre-Soleil. On a 1 u.a. $\approx 150 \times 10^6$ km.

On considère que la Terre tourne à vitesse constante autour du Soleil en décrivant un cercle de centre S, où se trouve le Soleil, et de rayon 1 u.a.

Au 1er janvier, la Terre se trouve en position A. La Terre décrit alors un arc de cercle $\overset{\frown}{\mathrm{AT}}$, mesuré en u.a., et un angle $\widehat{\mathrm{AST}}$, mesuré en degré.

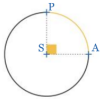
AIDE **1 a)** On suppose que la Terre fait un tour autour du Soleil en une année et on rappelle que le périmètre d'un cercle de rayon r est $2\pi r$.

1 a) Quelle est la distance parcourue (en u.a.) par la Terre en une année ? En six mois ? En un mois ? Les résultats seront écrits en notation scientifique avec deux décimales.

b) Déterminer l'angle $\widehat{\mathrm{AST}}$ correspondant à la position de la Terre dans chacun des cas de la question précédente.

c) La distance parcourue par la Terre est-elle proportionnelle à la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{AST}}$?

2 On note d la distance parcourue par la Terre depuis le point A. Compléter le tableau, sachant que la Terre n'a pas parcouru plus d'un tour autour du Soleil.



Angle $\widehat{\mathrm{AST}}$	30°	45°	60°	90°	180°	360°
d (en u.a.)	$\frac{\pi}{6}$					

3 a) Quelle est la distance parcourue par la Terre en trois ans et demi ?

b) La Terre se trouve en position P représentée ci-dessus. Sans connaître le nombre de tours effectués avant d'arriver à ce point, il n'est pas possible de savoir quelle est la distance parcourue par la Terre. Donner néanmoins plusieurs exemples possibles de distances parcourues pour arriver au point P en partant de A.

Bilan **Quel lien existe-t-il entre un angle mesuré en degré et la longueur de l'arc associé ?**

Indices :

1. a) Périmètre d'un cercle puis proportionnalité.
   b) 360° puis proportionnalité.
2. Proportionnalité.
3. Trois tours...

4 On souhaite associer à chaque nombre de l'horloge la mesure en radians de l'angle formé par le centre de la pendule, le nombre 12 et les autres nombres. Ainsi « 12 » correspond à 0 rad. Construire cette montre mathématique, plusieurs possibilités peuvent être envisagées.



2) Exercice d'application 4 p. 128 – *Horloge trigonométrique* – Re – ★

4 On souhaite associer à chaque nombre de l'horloge la mesure en radians de l'angle formé par le centre de la pendule, le nombre 12 et les autres nombres. Ainsi « 12 » correspond à 0 rad. Construire cette montre mathématique, plusieurs possibilités peuvent être envisagées.



Indices :

- (Ignorer le « plusieurs possibilités »)
- Un tour fait 2π, ici on fait des ... de tours.
- Attention, le cercle trigonométrique commence en haut ici.

6 Certaines figures de snowboard portent des noms qui correspondent à des mesures d'angles en degrés. Il y a le 180, le 270, le 360, le 450, le 630, le 720, le 810, le 900, le 1080, le 1260 et le 1440. Traduire ces figures en radians.



> Automatisme 1

6 Certaines figures de snowboard portent des noms qui correspondent à des mesures d'angles en degrés. Il y a le 180, le 270, le 360, le 450, le 630, le 720, le 810, le 900, le 1080, le 1260 et le 1440. Traduire ces figures en radians.



> Automatisme 1

Indices :
Utiliser la proportionnalité.

23 Placer sur le cercle trigonométrique les réels $\frac{7\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{2}$, 2π et 7π.

23 Placer sur le cercle trigonométrique les réels $\frac{7\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{2}$, 2π et 7π.

◀ **Indices :**
Commencer par 2π, puis placer les autres par découpage.

24 Convertir en radian les mesures suivantes.

Donner les valeurs exactes.

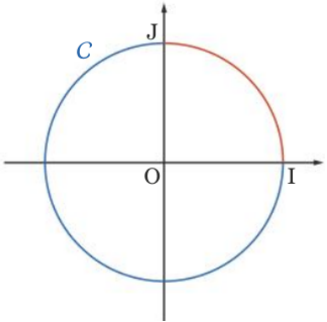
1. 30° **2.** 45° **3.** 1° **4.** 90°

24 Convertir en radian les mesures suivantes.
Donner les valeurs exactes.

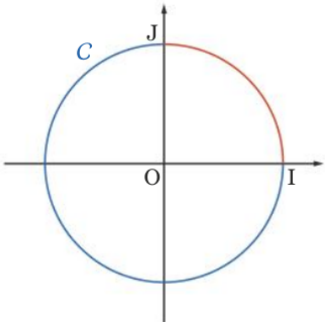
1. 30° **2.** 45° **3.** 1° **4.** 90°

Indices :
Utiliser la proportionnalité.

28 Sur la figure ci-dessous, C est le cercle trigonométrique. Quelle est la longueur de l'arc de cercle repassé en rouge ?



28 Sur la figure ci-dessous, C est le cercle trigonométrique. Quelle est la longueur de l'arc de cercle repassé en rouge ?



Indices :
Utiliser le déroulement.

29 Compléter les pointillés : « La somme des trois angles d'un triangle est égale à … rad. »

30 Donner la mesure en radian de tous les angles d'un triangle équilatéral.

29 Compléter les pointillés : « La somme des trois angles d'un triangle est égale à … rad. »

30 Donner la mesure en radian de tous les angles d'un triangle équilatéral.

Indices :

- La somme des angles d'un triangle est de 180°.
- Dans un triangle équilatéral, les angles sont égaux.

5 Dans chaque cas, exprimer en radians les mesures des trois angles α, β et γ d'un triangle, tel que :

a) $\alpha = 70°$ et $\beta = 15°$;

b) le triangle est rectangle isocèle ;

c) le triangle est isocèle et $\alpha = 45°$;

d) le triangle est équilatéral.

5 Dans chaque cas, exprimer en radians les mesures des trois angles α, β et γ d'un triangle, tel que :

a) $\alpha = 70°$ et $\beta = 15°$;

b) le triangle est rectangle isocèle ;

c) le triangle est isocèle et $\alpha = 45°$;

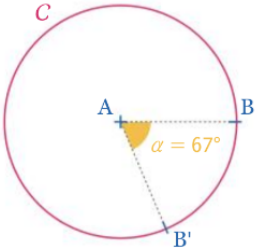
d) le triangle est équilatéral.

Indices :

- Conversion par proportionnalité.
- La somme des angles d'un triangle est de 180°.

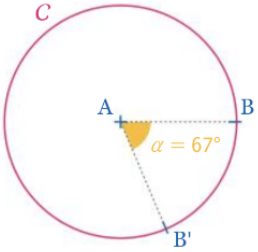
56 [Représenter.]

Sur la figure ci-dessous, C est le cercle de centre A et de rayon $AB = 4$. Déterminer la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{BB'}$. On arrondira le résultat à 10^{-2} près.



56 [Représenter.]

Sur la figure ci-dessous, C est le cercle de centre A et de rayon $AB = 4$. Déterminer la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{BB'}$. On arrondira le résultat à 10^{-2} près.



Indices :

- Convertir l'angle en radian.
- En déduire l'arc par déroulement (attention au rayon).

10) Exercice d'application 31 p. 180 (L.Sco.) *– Illustration d'angles –* Re – ★

31 Dans chaque cas, tracer un exemple de deux vecteurs vérifiant la condition donnée.

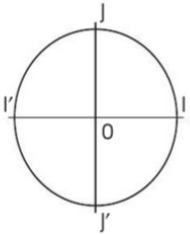
1. $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$
2. $(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{\pi}{4}$
3. $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$
4. $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$

31 Dans chaque cas, tracer un exemple de deux vecteurs vérifiant la condition donnée.

1. $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$
2. $(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{\pi}{4}$
3. $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$
4. $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$

Indices :
Se baser sur la définition du cours.

7 Reproduire le cercle trigonométrique ci-dessous, puis placer les points associés aux réels suivants :

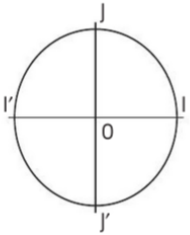


a) $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; π

b) $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{2}$; 2π

c) $-\frac{\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{2\pi}{3}$

7 Reproduire le cercle trigonométrique ci-dessous, puis placer les points associés aux réels suivants :



a) $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; π

b) $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{2}$; 2π

c) $-\frac{\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{2\pi}{3}$

Indices :

Utiliser la proportionnalité et regarder le signe.

10 Reproduire et compléter le tableau ci-dessous.

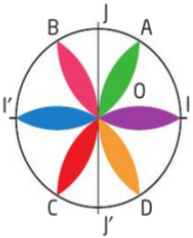
$(\vec{OI}, \vec{OM})$ en degrés	$(\vec{OI}, \vec{OM})$ en radians	Position de M
180		
	$-\frac{\pi}{3}$	
	$\frac{3\pi}{4}$	
		
240		

10 Reproduire et compléter le tableau ci-dessous.

$(\vec{OI}, \vec{OM})$ en degrés	$(\vec{OI}, \vec{OM})$ en radians	Position de M
180		
	$-\frac{\pi}{3}$	
	$\frac{3\pi}{4}$	
		
240		

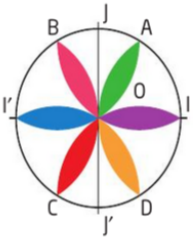
Indices :
Utiliser la proportionnalité et regarder le signe.

8 Un enfant a réalisé une rosace de la façon suivante : il trace un cercle de centre O et de rayon 1 ; puis, en gardant l'écartement du compas, il le pique en I et fait un arc de cercle pour obtenir le point A ; puis il le pique en A et fait un arc de cercle pour obtenir le point B, et ainsi de suite, jusqu'à obtenir la figure ci-contre.



À quels réels de l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ sont associés les points I, A, B, I', C et D ?

8 Un enfant a réalisé une rosace de la façon suivante : il trace un cercle de centre O et de rayon 1 ; puis, en gardant l'écartement du compas, il le pique en I et fait un arc de cercle pour obtenir le point A ; puis il le pique en A et fait un arc de cercle pour obtenir le point B, et ainsi de suite, jusqu'à obtenir la figure ci-contre.



À quels réels de l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ sont associés les points I, A, B, I', C et D ?

Indices :

- Les points sont répartis régulièrement.
- On peut toujours ajouter ou soustraire 2π.

15 Construire le cercle trigonométrique de centre O et placer sur le cercle les points A, B, C et D tels que :

$(\vec{OI}, \vec{OA}) = \dfrac{3\pi}{4}$, $(\vec{OI}, \vec{OB}) = -\dfrac{4\pi}{3}$,

$(\vec{OI}, \vec{OC}) = \dfrac{13\pi}{6}$, $(\vec{OI}, \vec{OD}) = \dfrac{5\pi}{3}$

15 Construire le cercle trigonométrique de centre O et placer sur le cercle les points A, B, C et D tels que :

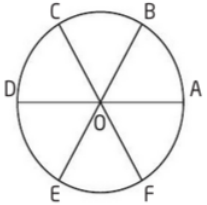
$(\vec{OI}, \vec{OA}) = \dfrac{3\pi}{4}$, $(\vec{OI}, \vec{OB}) = -\dfrac{4\pi}{3}$,

$(\vec{OI}, \vec{OC}) = \dfrac{13\pi}{6}$, $(\vec{OI}, \vec{OD}) = \dfrac{5\pi}{3}$

Indices :

Il peut être nécessaire de faire plusieurs tours.

11 Le cercle trigonométrique est partagé en 6 parts égales.



a) Donner une mesure en radians des angles suivants :

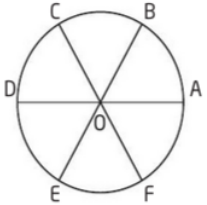
$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$; $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD})$;
$(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OC})$; $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA})$

b) Déterminer le point M tel que :

$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) = \dfrac{2\pi}{3}$ $\qquad$ $(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OM}) = -\dfrac{\pi}{3} + 4\pi$

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}) = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OM})$

11 Le cercle trigonométrique est partagé en 6 parts égales.



a) Donner une mesure en radians des angles suivants :

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$; $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD})$; $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OC})$; $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA})$

b) Déterminer le point M tel que :

$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) = \dfrac{2\pi}{3}$ $\qquad$ $(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OM}) = -\dfrac{\pi}{3} + 4\pi$

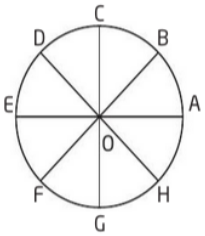
$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}) = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OM})$

Indices :

Ici se sont les angles entre deux vecteurs qui nous intéresse, pas depuis le vecteur origine.

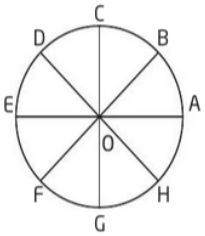
12 Le cercle trigonométrique est partagé en 8 parts égales. Déterminer une mesure en radians des angles suivants :

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$; $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OG})$;
$(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OD})$; $(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OB})$;
$(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OH})$; $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE})$.



12 Le cercle trigonométrique est partagé en 8 parts égales. Déterminer une mesure en radians des angles suivants :

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$; $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OG})$;
$(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OD})$; $(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OB})$;
$(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OH})$; $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE})$.



Indices :

Ici se sont les angles entre deux vecteurs qui nous intéresse, pas depuis le vecteur origine.

16 Déterminer la mesure principale des angles dont une mesure est :

$\frac{8\pi}{11}$; $\frac{19\pi}{13}$; $\frac{107\pi}{3}$; $\frac{125\pi}{11}$; $-\frac{137\pi}{3}$; $-\frac{28\pi}{13}$

16 Déterminer la mesure principale des angles dont une mesure est :

$\frac{8\pi}{11}$; $\frac{19\pi}{13}$; $\frac{107\pi}{3}$; $\frac{125\pi}{11}$; $-\frac{137\pi}{3}$; $-\frac{28\pi}{13}$

Indices :

La mesure principale doit être dans $]-\pi\,;\pi]$.

33 Parmi les mesures suivantes, lesquelles sont des mesures principales ?

$$0\ ;\ \frac{7\pi}{6}\ ;\ \frac{3\pi}{5}\ ;\ \frac{-9\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{5}\ ;\ \pi\ ;\ -\pi\ ;\ -\frac{32\pi}{33}$$

33 Parmi les mesures suivantes, lesquelles sont des mesures principales ?

$$0\,;\ \frac{7\pi}{6}\,;\ \frac{3\pi}{5}\,;\ \frac{-9\pi}{4}\,;\ \frac{\pi}{5}\,;\ \pi\,;\ -\pi\,;\ -\frac{32\pi}{33}$$

Indices :

La mesure principale doit être dans $]-\pi\,;\pi]$.

34 Parmi les mesures suivantes, lesquelles sont des mesures principales ?

$$0\ ;\ \frac{3\pi}{2}\ ;\ -\frac{5\pi}{6}\ ;\ \frac{7\pi}{3}\ ;\ -\pi\ ;\ -\frac{2\pi}{3}$$

34 Parmi les mesures suivantes, lesquelles sont des mesures principales ?

$$0\,;\ \frac{3\pi}{2}\,;\ -\frac{5\pi}{6}\,;\ \frac{7\pi}{3}\,;\ -\pi\,;\ -\frac{2\pi}{3}$$

◁ **Indices :**

La mesure principale doit être dans $]-\pi\,;\pi]$.

35 Donner la mesure principale de chacun des angles orientés de mesures suivantes.

$$\frac{3\pi}{2} ; \frac{19\pi}{6} ; \frac{2\pi}{3} ; -\frac{7\pi}{4} ; -\pi ; \frac{33\pi}{5} ; \frac{-\pi}{2}$$

35 Donner la mesure principale de chacun des angles orientés de mesures suivantes.

$$\frac{3\pi}{2} ; \frac{19\pi}{6} ; \frac{2\pi}{3} ; -\frac{7\pi}{4} ; -\pi ; \frac{33\pi}{5} ; \frac{-\pi}{2}$$

◁ **Indices :**

La mesure principale doit être dans $]-\pi ; \pi]$.

60 [Calculer.]

Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants.

1. $-\frac{17\pi}{3}$ **2.** 3π **3.** $\frac{179\pi}{6}$ **4.** $\frac{319\pi}{2}$

60 [Calculer.]

Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants.

1. $-\frac{17\pi}{3}$ **2.** 3π **3.** $\frac{179\pi}{6}$ **4.** $\frac{319\pi}{2}$

Indices :

La mesure principale doit être dans $]-\pi\,;\pi]$.

61 [Calculer.]

Parmi les angles orientés suivants, lesquels ont une mesure principale strictement positive ?

1. $\frac{3\pi}{2}$ **2.** $\frac{5\pi}{6}$ **3.** -105π **4.** $\frac{35\pi}{3}$

22) Exercice d'application 61 p. 182 (L.Sco.) *– Mesure principale –* Ca – ★★

61 [Calculer.]

Parmi les angles orientés suivants, lesquels ont une mesure principale strictement positive ?

1. $\frac{3\pi}{2}$ 2. $\frac{5\pi}{6}$ 3. -105π 4. $\frac{35\pi}{3}$

Indices :

La mesure principale doit être dans $]-\pi\,;\pi]$.

62 [Calculer.]

Donner une mesure des angles orientés suivant afin que cette mesure appartienne à l'intervalle $[2\pi\,;\,4\pi[$.

1. 5π **2.** $-\frac{7\pi}{3}$ **3.** $\frac{\pi}{6}$ **4.** $\frac{-13\pi}{5}$

23) Exercice d'application 62 p. 182 (L.Sco.) – *Angle dans un intervalle* – Ca – ★★

62 [Calculer.]

Donner une mesure des angles orientés suivant afin que cette mesure appartienne à l'intervalle $[2\pi\,;\,4\pi[$.

1. 5π **2.** $-\frac{7\pi}{3}$ **3.** $\frac{\pi}{6}$ **4.** $\frac{-13\pi}{5}$

◀ **Indices :**

On peut toujours rajouter ou soustraire 2π

32 Si quatre vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$ sont tels que $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{c}, \vec{d})$, a-t-on nécessairement $\vec{a} = \vec{c}$ et $\vec{b} = \vec{d}$?
Justifier.

32 Si quatre vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$ sont tels que $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{c}, \vec{d})$, a-t-on nécessairement $\vec{a} = \vec{c}$ et $\vec{b} = \vec{d}$?
Justifier.

Indices :
Deux vecteurs sont égaux si et seulement si...

B Cosinus et sinus sur le cercle trigonométrique

› Cours 2 A p. 172.

Objectif Déterminer l'abscisse et l'ordonnée d'un point du cercle trigonométrique.



Dans un repère orthonormé $(O ; I, J)$, $\mathcal{C}$ désigne le cercle trigonométrique, c'est-à-dire le cercle de centre O, de rayon 1 et muni d'un sens de parcours positif qui est inverse à celui des aiguilles d'une montre. Soit M est un point de ce cercle.

On note H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. On pose $x = \widehat{IOM}$.

1 a) Dans le triangle rectangle HOM, exprimer $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en fonction des longueurs des côtés.

b) Rappeler pourquoi $OM = 1$, puis en déduire que $OH = \cos(x)$ et que $HM = \sin(x)$.

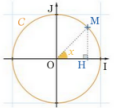
2 En déduire les coordonnées du point M.

Bilan Si M est un point du cercle trigonométrique, quel lien peut-on faire entre ces coordonnées et l'angle $\widehat{IOM}$?

B Cosinus et sinus sur le cercle trigonométrique

› Cours 2 A p. 172.

Objectif Déterminer l'abscisse et l'ordonnée d'un point du cercle trigonométrique.



Dans un repère orthonormé $(O ; I, J)$, $\mathcal{C}$ désigne le cercle trigonométrique, c'est-à-dire le cercle de centre O, de rayon 1 et muni d'un sens de parcours positif qui est inverse à celui des aiguilles d'une montre. Soit M est un point de ce cercle.

On note H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. On pose $x = \widehat{IOM}$.

1 a) Dans le triangle rectangle HOM, exprimer $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en fonction des longueurs des côtés.

b) Rappeler pourquoi $OM = 1$, puis en déduire que $OH = \cos(x)$ et que $HM = \sin(x)$.

2 En déduire les coordonnées du point M.

Bilan Si M est un point du cercle trigonométrique, quel lien peut-on faire entre ces coordonnées et l'angle $\widehat{IOM}$?

Indices :

- $\cos = \dfrac{\text{adjacent}}{\text{hypotenuse}}$

27 Python

On propose la fonction **cercle()** ci-contre.

a) Prévoir le résultat de
>>>cercle(pi/6) et
>>>cercle(-3*pi/4).

b) Expliquer ce que fait cette fonction.

```
from math import cos,sin,pi
def cercle(a):
    if cos(a)>=0 and sin(a)>=0:
        rep = 1
    elif cos(a)<=0 and sin(a)>=0:
        rep = 2
    elif cos(a)<=0 and sin(a)<=0:
        rep = 3
    else:
        rep = 4
    return "quart de cercle n°",rep
```

27 Python

On propose la fonction **cercle()** ci-contre.

a) Prévoir le résultat de
>>>cercle(pi/6) et
>>>cercle(-3*pi/4).

b) Expliquer ce que fait cette fonction.

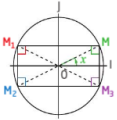
```
from math import cos,sin,pi
def cercle(a):
    if cos(a)>=0 and sin(a)>=0:
        rep = 1
    elif cos(a)<=0 and sin(a)>=0:
        rep = 2
    elif cos(a)<=0 and sin(a)<=0:
        rep = 3
    else:
        rep = 4
    return "quart de cercle n°",rep
```

Indices :

Sur un cercle trigonométrique, quels points ont des abscisses positives? négatives? Et pour les ordonnées?

23 **Exercice** guidé **Angles associés**

Lire sur le cercle trigonométrique les formules des angles associés.
$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = x$

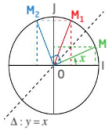


Étape 1 : Donner les coordonnées de M en fonction de x.

Étape 2 : $MM_1M_2M_3$ est un rectangle. Déterminer en fonction de x les mesures en radians des angles orientés $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM_1})$, $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM_2})$ et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM_3})$.

Étape 3 : Déterminer les coordonnées de M_1, M_2 et M_3 de deux façons différentes. En déduire 6 égalités correspondant à certaines propriétés des angles associés.

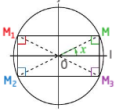
Étape 4 : M_1 est le symétrique de M par rapport à Δ la droite d'équation $y = x$ et M_2 est l'image de M par le quart de tour de centre O.



En reprenant les étapes 2 et 3, en déduire 4 nouvelles propriétés des angles associés.

23 **Exercice** guidé **Angles associés**

Lire sur le cercle trigonométrique les formules des angles associés.
$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = x$



Étape 1 : Donner les coordonnées de M en fonction de x.

Étape 2 : $MM_1M_2M_3$ est un rectangle. Déterminer en fonction de x les mesures en radians des angles orientés $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM_1})$, $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM_2})$ et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM_3})$.

Étape 3 : Déterminer les coordonnées de M_1, M_2 et M_3 de deux façons différentes. En déduire 6 égalités correspondant à certaines propriétés des angles associés.

Étape 4 : M_1 est le symétrique de M par rapport à Δ la droite d'équation $y = x$ et M_2 est l'image de M par le quart de tour de centre O.



En reprenant les étapes 2 et 3, en déduire 4 nouvelles propriétés des angles associés.

Indices :

1. Définition du cours.
2. Partir de π.
3. Pour chaque coordonnée, il y a deux points.
4. Partir de $\dfrac{\pi}{2}$

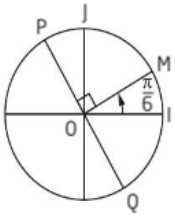
38 Déterminer le cosinus et le sinus de 107π.

38 Déterminer le cosinus et le sinus de 107π.

◅ **Indices :**
Faire plusieurs tours.

24 M, P et Q sont des points du cercle trigonométrique tels que $(\vec{OI}, \vec{OM}) = \frac{\pi}{6}$.

P et Q sont deux points du cercle trigonométrique tels que : (PQ) et (OM) sont perpendiculaires.

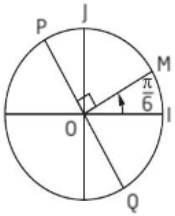


a) Déterminer une mesure des angles $(\vec{OI}, \vec{OP})$ et $(\vec{OI}, \vec{OQ})$.

b) Déterminer, en justifiant, les coordonnées des points M, P et Q dans le repère $(O ; \vec{OI}, \vec{OJ})$.

24 M, P et Q sont des points du cercle trigonométrique tels que $(\vec{OI}, \vec{OM}) = \frac{\pi}{6}$.

P et Q sont deux points du cercle trigonométrique tels que : (PQ) et (OM) sont perpendiculaires.



a) Déterminer une mesure des angles $(\vec{OI}, \vec{OP})$ et $(\vec{OI}, \vec{OQ})$.

b) Déterminer, en justifiant, les coordonnées des points M, P et Q dans le repère $(O ; \vec{OI}, \vec{OJ})$.

Indices :

Partir de $\frac{\pi}{6}$ et utiliser les symétries.

25 Déterminer les valeurs exactes des sinus et cosinus de $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$ et $-\frac{2\pi}{3}$.

25 Déterminer les valeurs exactes des sinus et cosinus de $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$ et $-\frac{2\pi}{3}$.

Indices :

- Commencer par faire un cercle trigonométrique pour repérer les angles associés connus.

36 Déterminer le cosinus et le sinus des nombres réels suivants.

$$\pi\ ;\ \frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{3\pi}{2}\ ;\ -\frac{5\pi}{6}\ ;\ \frac{2\pi}{3}\ ;\ -\frac{\pi}{4}$$

36 Déterminer le cosinus et le sinus des nombres réels suivants.

$$\pi\ ;\ \frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{3\pi}{2}\ ;\ -\frac{5\pi}{6}\ ;\ \frac{2\pi}{3}\ ;\ -\frac{\pi}{4}$$

Indices :

- Commencer par faire un cercle trigonométrique pour repérer les angles associés connus.

67 [Calculer.]

Déterminer le cosinus et le sinus des nombres réels suivants.

1. $\frac{3\pi}{4}$ 2. $-\frac{5\pi}{3}$ 3. $\frac{7\pi}{2}$ 4. $-\frac{5\pi}{6}$

67 [Calculer.]

Déterminer le cosinus et le sinus des nombres réels suivants.

1. $\frac{3\pi}{4}$ 2. $-\frac{5\pi}{3}$ 3. $\frac{7\pi}{2}$ 4. $-\frac{5\pi}{6}$

Indices :

- Commencer par faire un cercle trigonométrique pour repérer les angles associés connus.

68 [Calculer.]

Déterminer le cosinus et le sinus des nombres réels suivants.

1. $-\frac{13\pi}{4}$ **2.** -15π **3.** $\frac{17\pi}{3}$ **4.** $\frac{25\pi}{6}$

33) Exercice d'application 68 p. 183 (L.Sco.) – *Calculs associés* – Ra Re – ★★

68 [Calculer.]

Déterminer le cosinus et le sinus des nombres réels suivants.

1. $-\frac{13\pi}{4}$ 2. -15π 3. $\frac{17\pi}{3}$ 4. $\frac{25\pi}{6}$

Indices :

- Commencer par faire un cercle trigonométrique pour repérer les angles associés connus.

40 Parmi les égalités suivantes, déterminer lesquelles sont vraies.

1. $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
2. $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$
3. $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
4. $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

40 Parmi les égalités suivantes, déterminer lesquelles sont vraies.

1. $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
2. $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$
3. $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
4. $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

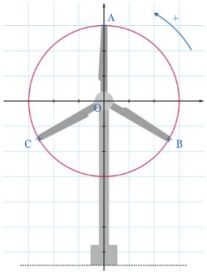
Indices :

Placer les points sur un cercle trigonométrique et repérer ou tester toutes les propriétés.

35) Problème 94 p. 187 (L.Sco.) – *Hélice* – Ch Mo – ★★★

94 [Chercher, Modéliser.]

Dans un repère orthonormé de centre O, on représente les extrémités des pales d'une éolienne par les points A, B et C. Les trois pales sont de même longueur, à savoir OA = OB = OC = 50 m, et l'éolienne est symétrique, c'est-à-dire que les angles $\widehat{BOA}$, $\widehat{AOC}$ et $\widehat{COB}$ sont égaux. Sur le dessin, A a pour coordonnées A(0 ; 50).



1. a. Justifier que $\widehat{BOA} = \frac{2\pi}{3}$.

b. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BOI}$ en radian, puis une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})$.

c. En déduire les coordonnées du point B.

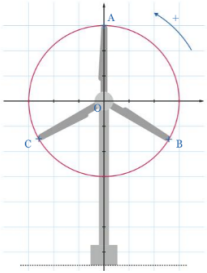
2. En utilisant la même méthode, calculer les coordonnées du point C.

3. L'hélice tourne à une vitesse de 15 tours par minute. Déterminer la vitesse de déplacement du point A de l'hélice en km/h. On arrondira à l'unité.

35) Problème 94 p. 187 (L.Sco.) – *Hélice* – Ch Mo – ★★★

94 [Chercher, Modéliser.]

Dans un repère orthonormé de centre O, on représente les extrémités des pales d'une éolienne par les points A, B et C. Les trois pales sont de même longueur, à savoir OA = OB = OC = 50 m, et l'éolienne est symétrique, c'est-à-dire que les angles $\widehat{BOA}$, $\widehat{AOC}$ et $\widehat{COB}$ sont égaux. Sur le dessin, A a pour coordonnées A(0 ; 50).



1. a. Justifier que $\widehat{BOA} = \frac{2\pi}{3}$.

b. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BOI}$ en radian, puis une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})$.

c. En déduire les coordonnées du point B.

2. En utilisant la même méthode, calculer les coordonnées du point C.

3. L'hélice tourne à une vitesse de 15 tours par minute. Déterminer la vitesse de déplacement du point A de l'hélice en km/h. On arrondira à l'unité.

Indices :

1. 1. Justifier que les angles sont égaux.
   2. $\widehat{BOA} = \widehat{BOI} + \widehat{IOA}$
   3. On utilise le cosinus et le sinus, mais on est pas sur le cercle trigonométrique, il faut prendre en compte le rayon.
2. Même chose.
3. Passer par le déroulement du point (par le périmètre du cercle).

   Avec $v = \dfrac{d}{t}$

22 Dans chaque cas, retrouver une mesure de l'angle α.

a) $\begin{cases} \cos(\alpha) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\alpha) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \cos(\alpha) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\alpha) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \cos(\alpha) = 0 \\ \sin(\alpha) = 1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \cos(\alpha) = -1 \\ \sin(\alpha) = 0 \end{cases}$

22 Dans chaque cas, retrouver une mesure de l'angle α.

a) $\begin{cases} \cos(\alpha) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\alpha) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \cos(\alpha) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\alpha) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \cos(\alpha) = 0 \\ \sin(\alpha) = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \cos(\alpha) = -1 \\ \sin(\alpha) = 0 \end{cases}$

Indices :

Placer le point en fonction de son abscisse et ordonnée.

33 Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$, puis dans $\mathbb{R}$:

a) $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **b)** $\sin(x) = 0{,}5$

c) $\cos(x) = 0$ **d)** $\sin(x) = 1$

e) $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **f)** $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

33 Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$, puis dans $\mathbb{R}$:

a) $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sin(x) = 0{,}5$

c) $\cos(x) = 0$ d) $\sin(x) = 1$

e) $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ f) $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Indices :
Utiliser la méthode du cours.

34 Résoudre dans $[0 ; 2\pi[$ puis dans $\mathbb{R}$:

a) $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **b)** $\cos(x) = -1$

c) $\sin(x) = 0$ **d)** $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

34 Résoudre dans $[0 ; 2\pi[$ puis dans $\mathbb{R}$:

a) $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\cos(x) = -1$

c) $\sin(x) = 0$ d) $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

◀ **Indices :**
Utiliser la méthode du cours.

35 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$ **b)** $\sin(x) = \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)$

35 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$ b) $\sin(x) = \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)$

Indices :

Placer la valeur connue, puis utiliser la méthode du cours.

39 Déterminer les nombres réels qui sont solutions de l'équation $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

39 Déterminer les nombres réels qui sont solutions de l'équation $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Indices :

Utiliser la méthode du cours.

41 Dans chaque cas, déterminer les nombres réels x de l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ qui sont solutions des équations suivantes.

1. $\cos(x)=1$
2. $\sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\cos(x)=\frac{1}{2}$
4. $\sin(x)=-\frac{1}{2}$

41 Dans chaque cas, déterminer les nombres réels x de l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ qui sont solutions des équations suivantes.

1. $\cos(x)=1$
2. $\sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\cos(x)=\frac{1}{2}$
4. $\sin(x)=-\frac{1}{2}$

Indices :
Utiliser la méthode du cours.

42 Dans chaque cas, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation donnée.

1. $\cos(x) = 0$
2. $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\cos(x) = -17$
4. $\sin(x) = -\frac{1}{2}$

42 Dans chaque cas, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation donnée.

1. $\cos(x) = 0$
2. $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\cos(x) = -17$
4. $\sin(x) = -\frac{1}{2}$

Indices :
Utiliser la méthode du cours.

70 [Calculer.]

Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$.

1. $\cos(x) = 0$
2. $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\sin(x) = 1$
4. $\sin(x) = -\frac{1}{2}$
5. $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
6. $\sin(x) = \frac{3}{2}$

70 [Calculer.]

Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$.

1. $\cos(x) = 0$
2. $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\sin(x) = 1$
4. $\sin(x) = -\frac{1}{2}$
5. $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
6. $\sin(x) = \frac{3}{2}$

◂ **Indices :**
Utiliser la méthode du cours.

71 [Calculer.]

Pour chacune des équations, déterminer l'ensemble des solutions appartenant à l'intervalle I.

1. $\cos(x) = 0$ sur $I = [0\ ;\ 2\pi]$.
2. $\sin(x) = \frac{1}{2}$ sur $I = [3\pi\ ;\ 5\pi]$.
3. $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $I = [-3\pi\ ;\ \pi]$.
4. $\sin(x) = -1$ sur $I = [7\pi\ ;\ 9\pi]$.

71 [Calculer.]

Pour chacune des équations, déterminer l'ensemble des solutions appartenant à l'intervalle I.

1. $\cos(x) = 0$ sur $I = [0\ ;\ 2\pi]$.
2. $\sin(x) = \frac{1}{2}$ sur $I = [3\pi\ ;\ 5\pi]$.
3. $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $I = [-3\pi\ ;\ \pi]$.
4. $\sin(x) = -1$ sur $I = [7\pi\ ;\ 9\pi]$.

Indices :

- Utiliser la méthode du cours.
- Puis conserver uniquement les valeurs dans l'intervalle.

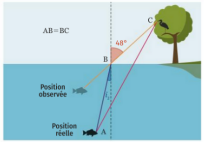
45) Problème 93 p. 186 (L.Sco.) – *Pêche au vol* – Ch Mo – ★★★

93 EN OPTIQUE [Calculer. Modéliser.]

Un héron repère un poisson dans l'eau (voir ci-dessous). Il souhaite plonger pour l'attraper, mais il sait que lorsque la lumière passe d'un milieu à un autre, elle subit une déviation. Il ne doit donc pas aller « tout droit vers le poisson ».

Rappel du cours de physique de 2de : Lorsqu'un rayon issu d'un milieu d'indice n_1 se réfracte dans un milieu d'indice n_2 en formant des angles respectivement i_1 et i_2 par rapport à la normale, alors ils sont liés par la formule : $n_1 \times \sin(i_1) = n_2 \times \sin(i_2)$. Pour l'eau et l'air, on a $n_{eau} = 1{,}33$ et $n_{air} = 1$.





Le héron souhaite attraper sa proie en se dirigeant en ligne droite en suivant le segment [CA]. On suppose le triangle ABC isocèle en B.

1. Que peut-on dire des angles $\widehat{BCA}$ et $\widehat{BAC}$?
2. Déterminer l'angle i_2 approché au degré près.
3. En déduire la valeur, arrondie au degré près, de l'angle $\widehat{BCA}$.

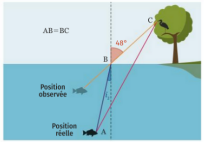
45) Problème 93 p. 186 (L.Sco.) – *Pêche au vol* – Ch Mo – ★★★

93 EN OPTIQUE [Calculer. Modéliser.]

Un héron repère un poisson dans l'eau (voir ci-dessous). Il souhaite plonger pour l'attraper, mais il sait que lorsque la lumière passe d'un milieu à un autre, elle subit une déviation. Il ne doit donc pas aller « tout droit vers le poisson ».

Rappel du cours de physique de 2de : Lorsqu'un rayon issu d'un milieu d'indice n_1 se réfracte dans un milieu d'indice n_2 en formant des angles respectivement i_1 et i_2 par rapport à la normale, alors ils sont liés par la formule : $n_1 \times \sin(i_1) = n_2 \times \sin(i_2)$. Pour l'eau et l'air, on a $n_{eau} = 1{,}33$ et $n_{air} = 1$.





Le héron souhaite attraper sa proie en se dirigeant en ligne droite en suivant le segment [CA]. On suppose le triangle ABC isocèle en B.

1. Que peut-on dire des angles $\widehat{BCA}$ et $\widehat{BAC}$?
2. Déterminer l'angle i_2 approché au degré près.
3. En déduire la valeur, arrondie au degré près, de l'angle $\widehat{BCA}$.

Indices :

1. Le triangle *BCA* est...
2. Résoudre l'équation à partir de la formule de réfraction.
3. Utiliser la somme des angles d'un triangle et les deux réponses précédentes.

index

73 [Calculer.]

Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$.

1. $\cos(x) \times \sin(x) = 0$

2. $\left(\cos(x) - \frac{1}{2}\right)(\sin(x) - 2) = 0$

73 [Calculer.]

Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$.

1. $\cos(x) \times \sin(x) = 0$
2. $\left(\cos(x) - \frac{1}{2}\right)(\sin(x) - 2) = 0$

◀ **Indices :**
Équations produits nuls

74 [Calculer.]

Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$.

1. $\cos(2x) = 0$

2. $\sin(2x) = \frac{1}{2}$

3. $\sin(3x) = -\frac{1}{2}$

4. $\cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

74 [Calculer.]

Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$.

1. $\cos(2x) = 0$

2. $\sin(2x) = \frac{1}{2}$

3. $\sin(3x) = -\frac{1}{2}$

4. $\cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Indices :

Poser un changement de variable.